









# التحفة السنية في الأصول الهندسية

ترجمة  
أحمد فندي عجب

طبعة ثالثة

بمطبعة المدارس المحمدية  
القاهرة الآن بالقبة العظمى  
١٣٠٩ هـ

طبعة

بسم الله الرحمن الرحيم

الخطبة السنية في الاصول الهندسية

---

المقالة الأولى

---

تعاريف

- (١) كل جسم يشغل من الفراغ الغير المحدود محلاً معيناً وهذا المحل يسمى بجسم  
كذلك الجسم
- (٢) سطح الجسم هو الحد الفاصل بينه وبين الفراغ المحيط به
- (٣) ملحق سطح جسمين يسمى خطاً
- (٤) النقطة ملحق خطين
- (٥) الاجسام والسطوح والمخطوط يمكن تصورها بدون واسطة الاجسام  
التي تعاقبها
- (٦) الاجسام والسطوح والمخطوط تسمى اشكالاً
- (٧) الغرض من الهندسة معرفة تقدير امتداد الاشكال والوقوف على خواصها
- (٨) الخط المستقيم هو خط غير منتهى يتميز بكونه اقصر من غيره. يبين

### ١) نقطتين من نقطة

ومن الأمور المسئلة انه لا يمكن ان يبدأ الخط ولحد مستقيم من أي نقطة الى اخرى وانه اذا اتخذ جزآن من خطين مستقيمين لتقدان في جميع امتدادها

(٩) الخط المنكسر والمضلع هو خط مركب من خطوط مستقيمة

(١٠) كل خط ليس مستقيماً ولا مركباً من خطوط مستقيمة فهو خط منحني

(١١) المستوى سطح اذا اخذ فيه نقطتان بالاختيار ووصل بينهما خط مستقيم كان هذا الخط بينهما في السطح

(١٢) كل سطح ليس مستوياً ولا مركباً من سطوح مستوية فهو سطح منحني

(١٣) الشكل المكوّن من مستقيمين متقاطعين كالمستقيمين ا ب و ا د

يسمى زاوية والنقطة ا هي رأس الزاوية

والخطان ا ب و ا د هما ضلعاها

والزاويتين تارة بحرف الرأس ا وتارة



بثلاثة أحرف هكذا ب ا د أو ا ب د مع الاعتناء بوضع حرف الرأس في الوسط

والزاويتان المتساويتان هما زاويتان مثل ا و د يمكن تطبيق احداهما

على الاخرى بمعنى انه لو فرض وضع الزاوية ا

على الزاوية د مع تطبيق الضلع ا ب على

الزاوية د و ه و ه رابطة حينئذ الضلع ا د على الضلع د ه



لاخذ بذلك اضلاع الزاويتين مع بعضهما وبمعالي حينئذ ان الزاويتين

المذكورتين متساويتان وأي زاوية كالزاوية ا تكون ضعف زاوية اخرى

كالزاوية د أو ثلاثة أمثالها أو أربعة أمثالها وهلم جرا اذا احسرت

بين ضلعيها على زاويتين أو على  
ثلاثة زوايا أو أربع زوايا كل  
منها يساوي الزاوية و على  
ذلك فالزوايا تقبل المقارنة



بعضها كما لمقادير الأخرى

(١٤) متى تعادل مستقيم مثل  $ab$  مع مستقيم آخر مثل  $cd$  بحيث تكون الزاويتان

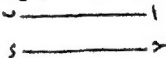
المجاورتان وهما  $a, b$  و  $c, d$  مساويتين فإن الخط  $ab$  يقال له  
عمود على  $cd$  وكل من الزاويتين  
المساويتين  $a, b$  و  $c, d$  تسمى



زاوية قائمة

وسببهن فيما سياتي على أن أي نقطة كالنقطة  $a$  أخذت على مستقيم كالمنحني  
 $cd$  يمكن أن يقام منها على هذا المستقيم عمود  $ab$  فإن الزوايا القائمة كلها متساوية  
كل زاوية أكبر من الزاوية القائمة تسمى زاوية منفرجة وكل زاوية أصغر من الزاوية  
القائمة تسمى زاوية متعادلة

والزاويتان المتكاملتان لبعضهما هما زاويتان مجموعهما يساوي زاويتين قائمتين  
والزاويتان المتخلفتان لبعضهما هما زاويتان مجموعهما يساوي قائمة وخط  
(١٥) الخطان المتوازيان هما خطان موجودان في مستوى واحد إذا امتدلا لا يلتقيان  
أصل ذلك كالخطين  $ab$  و  $cd$





(٥)

(١٦) الشكل المستوي هو مستوي محدود من جميع الجهات بخطوط  
 فإذا كانت تلك الخطوط مستقيمة فإن المساحة المحصورة  
 بينها تسمى شكلاً مستقيماً الاضلاع أو مضلعاً وخطوط  
 نفسها باجتماعها مع بعضها يحدث عنها ما يسمى



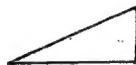
محيط المضلع

(١٧) أبسط الاشكال المستقيمة الاضلاع ما كانت اضلاعه ثلاثة وتسمى مثلثاً  
 كما ان كانت اضلاعه أربعة تسمى شكلاً رباعياً الاضلاع أو رباعياً فقط وما كانت  
 اضلاعه خمسة تسمى خمساً وما كانت اضلاعه ستة تسمى سدساً وهكذا

(١٨) المثلث المتساوي الاضلاع هو مثلث جميع اضلاعه متساوية والمثلث  
 المتساوي الساقين هو مثلث فيه ضلعان متساويان  
 فقط والمثلث المختلف الاضلاع هو مثلث جميع اضلاعه  
 غير متساوية



(١٩) المثلث القائم الزاوية هو مثلث احده زواياه قائمة والضلع المقابل للزاوية  
 القائمة يسمى بالوتر وذلك كالمثلث ا ب د فانه  
 قائم الزاوية في ا والضلع ب د هو وتر  
 القائمة



(٢٠) من الاشكال الرباعية تميز الاشكال الاتية وهي

المربع وهو ما كانت اضلاعه متساوية وزواياه  
 قائمة

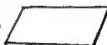


(٦)

والمسطط وهو ما كانت زواياه قائمة واهلعه غير متساوية



ومتوازي الاضلاع وهو ما كانت اهلعه المتقابلة متوازية



والمعين وهو ما كانت اهلعه متساوية وزواياه غير قائمة



وشبه المخرف وهو ما كان فيه ضلعان متوازيان فقط



(١١) قطر المضلع خط مستقيم واصل بين رأسين زاويتين غير متجاورتين من

زوايا المضلع

(١٢) المضلع المتساوي الاضلاع ما كانت اهلعه متساوية والمضلع المتساوي

الزوايا ما كانت زواياه متساوية

(١٣) المضلعان المتساويان في الاضلاع هما ما كانت اهلعهما متساوية كل

لتغيره وموضوعة على ترتيب واحد بمعنى انه اذا صار اتباع محيطهما في جهة

واحدة فان المضلع الاول من احدهما يكون مساويا للمضلع الاول من الاخر والمضلع

الثاني يساوي المضلع الثاني والمضلع الثالث يساوي المضلع الثالث وهم جمل واحد يمثل

هذا يسمى بالوقوف على معنى المضلعين المتساويين في الزوايا

وفي كلتا الحالتين تسمى الاضلاع المتساوية بالاضلاع المتساوية وتسمى الزوايا

المتساوية بالزوايا المتساوية

(v)

(٤) القطب المذهب هو مضلع إذا مضلع ما من أضلاعه وجد المضلع ما جمعه في جهة واحدة من جهتي هذا المستقيم ومثاله

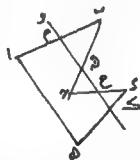


ومحيط المضلع المحدث لا يمكن ان يقطعه المستقيم في اكثر من نقطتين

لأنه إذا قابل مستقيم مثل وط محيط المضلع

ابحور في النقطة م، د، ج، ك فان

الضلع = المقطوع بالمستقيم وط في  
أحدى النقطه المتوسطة د يكون في كل من



(١٥) الشكلاون المتساويان بمجموع كائنا أو سطحيين أو خطيين هما شكلاون

يمكن تطبيق أحدهما على الآخر بحيث يتحدان مع بعضهما اتحاداً تاماً

(تنبیه) الاربع مقالات الاول لا يذكر فيها الا الاشكال المستوية أم  
المرسومة على سطح مستوي

بیان الإطلاحات والإشارات

الأمر المتعارف هو أمر واضح من نطقه لا يحتاج لدليل

والنظرية أمر حقيقي يتضح بواسطة دليل عقلي يسمى برهاناً

والمسئلة أم مطلوب يراد حله

والفائدة أمر حقيق يستعمل واسطة اما للابتهنة على نظرية واما لحل مسألة

والقضية اسم يطلق على النظرية والمسئلة والغائده  
والنتيجة أمر يستط من قضيه او من جملة قضا يا  
والنتيجه عبارة توضع بخصوص قضيه أو جملة قضا يا تقدمت بقصد بيان  
ارتباطها ببعضها أو منفعتها أو اقتصارها أو غايتها  
الأمر المفروض هو أمر يقدرا ما في منطق قضيه أو في اثنا برهان  
الاشارة = هي اشارة التساوى وعلى مقتضاها تكون العبارة  $a = b$   
معناها  $a = b$

وللاستدلال على ان  $a$  أصغر من  $b$  يكتب  $a < b$   
وللاستدلال على ان  $a$  أكبر من  $b$  يكتب  $a > b$   
والاشارة  $+$  ينطبق بها زائد وهى تدل على الجمع والاشارة  $-$  ينطبق بها  
ناقص وهى تدل على الطرح وعلى ذلك يدل  $a + b$  على حاصل جمع الكيتين  $a$  و  $b$   
ويدل  $a - b$  على باقى طرح هاتين الكيتين الأولى ما يتبقى من بعد طرح  $b$  من  $a$   
وايضاً  $a + b$  أو  $a - b$  معنى  $a$  انه يجب جمع  $a$  على بعضهما  
وطرح  $b$  من الجمع

والاشارة  $x$  تدل على الضرب وعلى مقتضاها يدل  $a \times b$  على حاصل ضرب  
 $a$  و  $b$  وتستعمل الاشارة  $x$  احياناً بنقطة بحيث ان  $a \cdot b$  و  $a \times b$   
معناها واحد ويبين حاصل الضرب عليه ايضاً من غير اشارة متوسطة  
بين عامليه بحيث يكتب هكذا  $ab$  انما لا يلزم استعمال هذه  
العبارة الا عند عدم استعمالها في آن واحد لبيان الخط  $ab$  الذى  
بلاش  
م

هو بعد التقطين ا ب

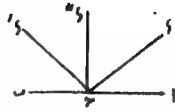
والعبارة  $x(1 + b - a)$  تدل على حاصل ضرب  $1$  في الكمية  $b - a + 1$   
 وإذا الزم الآخر لضرب  $1 + b$  في  $1 - a - b$  يبين حاصل الضرب هكذا  
 $(1 + b)(1 - a - b)$  وكلما وجد بين القوسين بقدر كمية واحدة  
 وأي عدد وضع قبل خط أو قبل كمية يستعمل عاملاً لهذا الخط أو لهذه الكمية  
 وعلى ذلك لا محل للدلالة على أن الخط  $ab$  مكرر ثلاث مرات يكسب هكذا  
 $3ab$  ولا محل لبيان نصف الزاوية  $a$  يكتب  $\frac{1}{2}a$   
 ومربع الخط  $ab$  يبين هكذا  $a^2$  ومكعبه يبين هكذا  $a^3$  وسجيب  
 المعنى المضبوط لمربع خط أو مكعبه عند حوله في محله  
 والاشارة  $\gamma$  تدل على جذر يلزم استخراجها فعلى مقتضاها يكون  $\gamma^2 =$   
 هو الجذر التربيعي للعدد  $a$  ويكون  $\gamma^2 = a$  هو جذر حاصل الضرب  $a \times b$   
 أو هو الوسط المتناسب بين  $a$  و  $b$

## الفصل الأول

### نظريه

أي نقطة أخذت على مستقيم يمكن أن يقام منها عمود على هذا المستقيم ولا يمكن أن  
 يقام عليه منها إلا عمود واحد.  
 وذلك لأنه إذا فرض أن مستقيماً مثل  $abc$  كان منطبقاً على مستقيم آخر مثل  
 $ab$  ثم دار حول النقطة  $a$  قائمه يكون مع  $ab$  زاويتين متجاورتين

احد  $\alpha$  و  $\beta$  حول احدها وهي  $\alpha$  تكون  
في الابتداء صغيرة جدًا ثم تأخذ في الزيادة دائماً  
والاخرى وهي  $\beta$  تكون في الابتداء اكبر



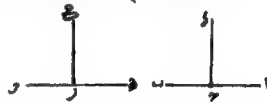
من  $\alpha$  ثم تأخذ في التناقص دائماً حتى تنتهي الى الصفر  
ومن ذاك يرى ان الزاوية  $\alpha$  التي كانت في الابتداء صغرى و  $\beta$  تصبح  
اكبر من هذه الزاوية فعلى هذا يوجد وضع  $\alpha$  من أوضاع المستقيم المتحرك  
تكون فيه هاتان الزاويتان متساويتين ومن اليسى ان هذا الوضع مفرد  
لا وجود لغيره

(نتيجة) الزاوية القائمة كلها متساوية

أى اذا كان المستقيم  $\alpha$  عموداً على  $\alpha$  وكان المستقيم  $\beta$  عموداً على  $\beta$  و

فان الزاوية  $\alpha$  تكون

متساوية للزاوية  $\beta$



وذلك لانه اذا وضع المستقيم  $\beta$

على  $\alpha$  بحيث تقع النقطة  $\beta$  في  $\alpha$  فان  $\beta$  يأخذ اتجاه  $\alpha$   
والا لا يمكن إقامة عمودين على هذا المستقيم من نقطة واحدة مأخوذة عليه

المقدمة الثانية

نظريه

كل مستقيم مثل  $\alpha$  قابل مستقيماً آخر مثل  $\beta$  أحدث معه زاويتين

متجاورين  $\alpha$  و  $\beta$  مجموعهما يساوي زاويتين قائمتين  
 لأنه إذا قسم العدد  $\beta$  على  $\alpha$  من النقطة  
 $\gamma$  فإن الزاوية  $\alpha$  تكون كتابة عن مجموع  
 الزاويتين  $\alpha$  و  $\beta$  وعلى هذا يكون  
 $\alpha + \beta$  عبارة عن مجموع الثلاث زوايا  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$   
 ومن حيث أن الأولى من هذه الزوايا قائمة وأن مجموع الزاويتين الأخرتين  
 عن الزاوية القائمة هو مجموع الزاويتين  $\alpha$  و  $\beta$  يكون  
 مساويًا للزاويتين قائمتين

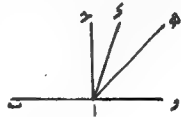
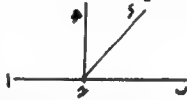
(نتيجة ١) إذا كانت إحدى الزاويتين  $\alpha$  و  $\beta$  قائمة فإن الأخرى  
 تكون كذلك

(نتيجة ٢) إذا كان المستقيم  $AB$  عمودًا على  $AB$  فإن  $AB$  يكون  
 بالعكس عمودًا على  $AB$

لأنه من حيث أن  $AB$  عمود على  $AB$  تكون  
 الزاوية  $\alpha$  مساوية لمجاورتها  $\beta$  وعلى  
 منهما تكون قائمة لكن حيث أن الزاوية  $\alpha$  قائمة فالزاوية  $\beta$   
 المجاورة لها تكون قائمة أيضًا وعلى ذلك تكون الزاوية  $\alpha = \beta$   
 وبذا يكون  $AB$  عمودًا على  $AB$

(نتيجة ٣) جميع الزوايا المتماثلة

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta$  أو المتكونة







تكونان متساويين

لأنه من حيث أن الخط  $د$  مستقيم فإن مجموع الزاويتين  $١$  و  $٢$  يكون مساوياً قائمتين ومن حيث أن الخط  $د$  مستقيم يكون مجموع الزاويتين  $٣$  و  $٤$  مساوياً قائمتين أيضاً وعلى ذلك يكون  $١ + ٣ = ٢ + ٤$  فإذا طرقت الزاوية  $١$  من الطرفين كانت الزاوية  $٣$  مساوية للزاوية  $٢$  المقابلة لها بالرأس



وبمثل هذا يبرهن على أن الزاوية  $٤$  تساوي مقابلتها  $١$  (تنبه) مجموع الأربع زوايا المتكونة حول نقطة بمستقيمين متقاطعين يساوي أربع زوايا قائمة لأن مجموع الزاويتين  $١$  و  $٣$  يساوي زاويتين قائمتين وكذا مجموع الزاويتين  $٢$  و  $٤$

وعلى العموم إذا تقابل عددان من المستقيما  
في نقطة مثل  $د$  فإن مجموع الزوايا المتعاقبة



$١$  و  $٢$  و  $٣$  و  $٤$  و  $٥$  و  $٦$  و  $٧$  و  $٨$  يكون مساوياً لأربع زوايا قائمة لأنه إذا صار تشكيل أربع زوايا قائمة في النقطة  $د$  بمستقيمين متعامدين فن البديهي أن مجموعها يكون مساوياً للزوايا المتعاقبة المذكورة

القضية الثامنة

نظرية

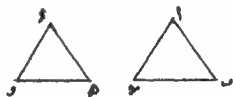
إذا تساوى مثلعان والزاوية المحصورة بينهما من مثلثين والزاوية المحصورة

بينهما من مثلث آخر كل نظيره كان المثلثان متساويين

أي إذا فرض أن الضلع  $ا ب = د ه$  وأن

الضلع  $ا د = د و$  وإذا نظرية  $ا = د$

فإن المثلثين  $ا ب د$  و  $د ه و$  يكونان



متساويين

وذلك لأنه يمكن وضع أحدهما هذين المثلثين على الآخر بحيث يتحدان مع بعضهما  
اتحاداً كلياً فإذا وضع الضلع  $د ه$  في بدء الأمر على مساوية  $ا ب$  فإن النقطة  $د$  تقع  
في  $ا$  والنقطة  $ه$  تقع في  $ب$  وحيث أن الزاوية  $د$  تساوي الزاوية  $ا$  المتى  
وضع الضلع  $د ه$  على  $ا ب$  يأخذ الضلع  $د و$  اتجاه  $ا د$  وحيث أن  $د و =$   
 $ا د$  تقع النقطة  $و$  في  $د$  والضلع الثالث  $د ه$  يقع بالضبط على الضلع الثالث  
 $ا ب$  وحيث أن يكون المثلث  $د ه و$  مساوياً للمثلث  $ا ب د$

(نتيجة) من كون الزاوية  $ا = د$  والضلع  $ا ب = د ه$  والضلع  $ا د = د و$   
يستنتج أن الزاوية  $ب = ه$  والزاوية  $د = و$  والضلع  $ب د = ه و$

### القضية السادسة

#### نظريه

إذا تساوى ضلع والزاويتان المجاورتان له من مثلث ضلعاً والزاويتين المجاورتين  
له من مثلث آخر كل نظيره كان المثلثان متساويين

أي إذا فرض أن الضلع  $ب د$  يساوي الضلع

$د ه$  وأن الزاوية  $ب$  تساوي الزاوية  $ه$



وان الزاوية د تساوى الزاوية و فان المثلثين ا ب د و ه و يكونان  
متساويين

لانه اذا وضع ه و على مساويه ب د بقصد تطبيق المثلثين على بعضهما فان  
النقطة ه تقع في ب والنقطة و تقع في د وحيث ان الزاوية ه تساوى  
الزاوية ب فالضلع ه و يأخذ اتجاه ب ا وبذا توجد النقطة د على  
نقطة من نقط الخط ا ب وايضا من حيث ان الزاوية و تساوى الزاوية د  
فالخط و د يأخذ اتجاه د ا والنقطة د توجد في نقطة من نقط الضلع د ا  
وعلى ذلك فالنقطة د الواجب وجودها على الخطين ب ا و د ا في آن واحد  
تقع على نقطة تقاطعها وهي ا وبذا يتحد المثلثان ا ب د و ه و مع بعضهما  
ويصيران متساويين

(نتيجة) من كون الضلع ب د = ه و والزاوية ب = ه والزاوية د = و  
يستج ان الضلع ا ب = د ه وان الضلع ا د = د و وان الزاوية ا = د

### القضية السابعة نظريه

اى ضلع من اضلاع اى مثلث اصغر من مجموع الضلعين الآخرين  
لان الخط المستقيم ب د مثلا اقصر بعد بين النقطتين  
ب د (تعريف ٨) فعلى ذلك يكون ب د اصغر من  
ا ب + ب د



ويجب الالتفات ايضا لكون اى ضلع اكبر من فرق الضلعين الآخرين

لانه اذا فرض أن  $\delta$  اكبر الاضلاع وان  $\delta$  و  $\delta$  الضلعان الآخران  
فانه بطرح  $\delta$  من طرفي المتباينة  $\delta > \delta + \delta$  و تنج المتباينة  $\delta - \delta > \delta$   
ويطرح  $\delta$  ينتج  $\delta - \delta > \delta$  و

### القضية الثامنة

نظرية

اذا أخذت نقطة مثل  $\delta$  داخل مثلث مثل  $\delta$  ووصل بينها وبين نهايتي  
اي ضلع مثل  $\delta$  مستقيمان  $\delta$  و  $\delta$  فان مجموع هذين المستقيمين  
يكون اصغر من مجموع الضلعين الآخرين  $\delta$  و  $\delta$

لانه اذا مد  $\delta$  و حتى يقابل الضلع  $\delta$  في  $\delta$  فان الخط المستقيم  $\delta$  و  
يكون اصغر من  $\delta$  و  $\delta$  (قضية ٧) فاذا اضيف  $\delta$  و لكل من الطرفين  
يحدث  $\delta$  و  $\delta$  و  $\delta$  و  $\delta$  و  $\delta$  و  $\delta$  و  $\delta$  أو

$$\delta + \delta > \delta + \delta + \delta$$

و يمثل ذلك يحدث  $\delta + \delta > \delta + \delta$  فاذا اضيف

$\delta$  و لكل من الطرفين يحدث  $\delta + \delta > \delta + \delta + \delta$  وحيث قد وجدنا

$$\delta + \delta > \delta + \delta + \delta$$

### القضية التاسعة

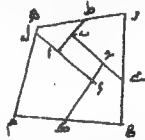
نظرية

كل خط مضلعى محدد مثل  $\delta$  و يكون اصغر من أي خط آخر يحيط  
به من جميع الجهات مثل  $\delta$  و  $\delta$

عجيب هه م

برهانه ان تمداضالع الشكل ا ب ح د في جهة واحدة حتى تقابل مع الخط المحيط فتحدث المتباينات الآتية وهي

$$\begin{aligned} & \text{ا ب} + \text{ب ط} > \text{ا ل} + \text{ل ه} + \text{ه ط} \\ & \text{و ب} + \text{ب د} + \text{د ط} > \text{و ط} + \text{ط و} + \text{و ع} \\ & \text{د ح} + \text{ح ك} > \text{د ع} + \text{ع ح} + \text{ح ك} \\ & \text{و د} + \text{د ا} > \text{و ك} + \text{ك م} + \text{م ل} \end{aligned}$$



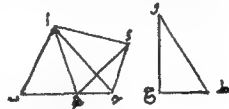
فاذا اضيفت هذه المتباينات على بعضها طرقا بطرفي وحذفت الأجزاء المشتركة بين الطرفين يحدث  
 $\text{ا ب} + \text{ب ط} + \text{د ح} + \text{و د} + \text{و ح} + \text{ح م} + \text{م ل} > \text{ا ل} + \text{ل ه} + \text{ه ط} + \text{ط و} + \text{و ع} + \text{ع ح} + \text{ح ك} + \text{ك م} + \text{م ل}$   
 ويبرهن بمثل ذلك على ان كل خط مغلفي محدب أصغر من اى خط محيط به  
 متحد معه في النهايتين

(تنبيه) النظرية المتقدمة انما هي حالة خصوصية من هذه النظرية

### الموضحة العاشرة نظرية

اذا ساوى ضلعان من مثلث ضلعين من مثلث آخر كل نظيريه وكانت الزاوية  
 المحصورة بين الضلعين الاولين اكبر من الزاوية المحصورة بين الضلعين الآخرين فان  
 الضلع الثالث من المثلث الاول يكون اكبر من الضلع الثالث من المثلث الثانى

اى اذا كان  $\text{ا ب} = \text{د ح}$  ,  $\text{و ج} = \text{ه ط}$   
 في المثلثين ا ب ج , د ح ط وكانت  
 الزاوية  $\text{ب ا ج} < \text{ح د ط}$  فان



الضلع  $\beta$  يكون أكبر من الضلع  $\gamma$  ط

برهانه ان تنشأ زاوية  $\alpha = \epsilon$  و  $\gamma$  وط ويجعل  $\alpha = \epsilon$  و  $\gamma$  و ثم يوصل  $\delta$  ،  
فالمثلثان  $\alpha \delta \gamma$  و  $\epsilon \gamma \beta$  يكونان متساويين لان فيهما زاويتين متساويتين  
محصورتين بين اضلاع متساوية ومن حيثئذ يكفي ان يبرهن على  
ان  $\beta < \delta$  د

ولذا تقسم الزاوية  $\beta$  الى قسمين متساويين بالمستقيم  $\alpha$  فهذا المستقيم  
يقع في الزاوية الكبرى  $\beta$  ثم يوصل الخط  $\delta$  فالمثلثان  $\alpha \delta \gamma$  ،  
 $\alpha \delta \beta$  يكونان متساويين لان فيهما زاويتين متساويتين محصورتين بين  
اضلاع متساوية ومن تساوى هذين المثلثين يكون  $\delta = \epsilon$  و لكن المثلث  
 $\delta \epsilon \gamma$  فيه  $\delta > \epsilon$  و  $\delta + \epsilon > \delta$  فاذا وضع  $\delta$  عوضا عن  $\epsilon$  يكون  $\delta > \epsilon$   
 $\delta + \epsilon > \delta$  أى  $\delta > \beta$  ح

واذا بالعكس كان الضلعان  $\alpha$  و  $\beta$  من المثلث  $\alpha \beta \gamma$  مساويين للضلعين  
 $\gamma \delta$  و  $\delta \epsilon$  من المثلث  $\gamma \delta \epsilon$  وكان الضلع الثالث  $\beta$  من المثلث الاول  
أكبر من الضلع الثالث  $\gamma \delta$  من المثلث الثاني فان الزاوية  $\beta$  تكون  
أكبر من الزاوية  $\gamma$  وط

لانه اذا كانت الزاوية  $\beta$   $> \gamma$  وط فعلى ما تقدم يكون  $\delta > \beta$  ط  
وهو بخلاف الغرض واذا كانت الزاوية  $\beta$  مساوية  $\gamma$  وط يكون  
 $\delta = \beta$  ط (قضيه هـ) وهو بخلاف الغرض ايضا



لاحظه اذا وصل الخط ١ بين الرأس ٢ والنقطة ٤ التي هي منتصف القاعدة ٣ ٤ كانت أضلاع المثلثين ١ ٤ ٢ و ١ ٤ ٣ متساوية على المناظر اذا ضلع ١ مشترك بين المثلثين والضلع ٢ ٤ = ٣ ٤ بالفرض ، و بالاعمال فعلى مقتضى النظرية المتقدمة تكون الزاوية ٢ مساوية للزاوية ٣



(نتيجة) المثلث المتساوي الاضلاع يكون متساوي الزوايا أيضاً بمعنى أن زواياه تكون متساوية

(تشبيه) ينتج من تساوي المثلثين ١ ٤ ٢ ، ١ ٤ ٣ ان الزاوية ٢ ١ ٤ = ٣ ١ ٤ وان الزاوية ٢ ١ ٤ = ٣ ١ ٤ وعلى ذلك تكون هاتان الزاويتان الأخيرتان قائمتين ومن ذا بعلم ان الخط الواصل من رأس المثلث المتساوي الساقين الى منتصف قاعدته يكون عموداً على هذه القاعدة وقاسماً زاوية الرأس الى قسمين متساويين في المثلث الغير المتساوي الساقين تجعل قاعدته ضلعاً حقيقياً اتفق من اضلاعه وحينئذ يكون رأسه هي رأس الزاوية المقابلة للضلع المتخذ قاعدة واما في المثلث المتساوي الساقين فان ضلعه الذي دون الساقين يتخذ بالخصوص قاعدة له

### القبضة الثالثة عشر نظريه

اذا (بعكس النظرية المتقدمة) تساوي زاويتان من مثلث فان الضلعين المقابلين لهما يكونان متساويين ويكون المثلث متساوي الساقين



(٢١)

أى إذا كانت الزاوية  $\alpha = \beta$  فإن الضلع  $\alpha$  يكون مساوياً



لأنه ان لم يكن هذان الضلعان متساويين كانت  
أحدهما  $\alpha$  مثلاً اكبر من الآخر فاذا أخذ  $\beta$   
 $\alpha = \beta$  ووصل  $\gamma$  فلدعى ان الزاوية  $\delta = \epsilon$

$\alpha = \beta$  بالفرض والضلعان  $\beta$  و  $\gamma$  مساويان للضلعين  $\alpha$  و  $\gamma$   
 $\beta$  بالتناظر يكون المثلث  $\gamma$  و  $\delta$  مساوياً للمثلث  $\alpha$  و  $\delta$  لكن الجزء  
لا يمكن مساواته للكل فعلى ذلك يلزم ان يكون الضلعان  $\alpha$  و  $\beta$  متساويين  
وبذا يكون المثلث  $\alpha$  و  $\beta$  متساوي الساقين

### المقضية الرابعة عشر

نظريه

في كل مثلث الزاوية الكبرى يعادلها الضلع الاكبر وبالعكس أى الضلع الاكبر  
تعايله الزاوية الكبرى



(الامر الأول) إذا كانت الزاوية  $\delta < \epsilon$  كانت  
الضلع  $\alpha$  المقابل للزاوية  $\delta$  اكبر من الضلع  $\beta$   
المقابل للزاوية  $\epsilon$

لأنه إذا أخذت زاوية  $\delta = \epsilon$  فالمثلث  $\delta$  و  $\epsilon$  يكون فيه  $\delta = \epsilon$   
(قضية ١٣) لكن الخط المستقيم  $\alpha > \beta$  و  $\delta + \epsilon = \delta + \epsilon = \delta + \epsilon$

$\angle a =$  فعلى ذلك يكون  $\angle a < \angle d$

(الأمر الثاني) إذا كان الضلع  $ab < ad$  كانت الزاوية  $d$  المقابلة للضلع

$ab$  أكبر من الزاوية  $b$  المقابلة للضلع  $ad$

لأنه إذا كانت  $d > b$  فعلى مقتضى ما سبق يكون  $ab > ad$  وهو بخلاف

الفرض وإذا كانت  $d = b$  كان  $ab = ad$  (قضية ١٣) وهو بخلاف

الفرض أيضاً فمن ذلك يلزم أن تكون الزاوية  $d$  أكبر من الزاوية  $b$

## المقضية الخامسة عشر

نظريه

أي نقطة فرضت خارج خط مستقيم لا يمكن أن ينزل منها على هذا المستقيم العمود واحد

لأنه لو أمكن تنزل عمودين مثل  $ah$  و  $ab$  على  $d$  من القطعة  $a$  ومدة

أحدهما  $ah$  بكية  $a = ah$  ووصل  $ab$  فان المثلث  $ahb$  يكون

مساوياً للمثلث  $ahb$  لأن الزاويتين  $ahb$  و  $ahb$  قائمتان والضلع

$ah = ah$  والضلع  $b$  مشترك بين المثلثين ومن ذا ينبج أن الزاوية

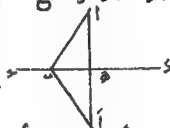
$ab = ah = a$  وحيث أن الزاوية  $ab$  هـ

قائمة فتكون الزاوية  $ah$  قائمة أيضاً لكن إذا

كان مجموع الزاويتين المتجاورتين  $ah$  و  $ah$  هـ  $a$

مساوياً زاويتين قائمتين يلزم أن يكون الخط  $ab$  مستقيماً ومنه ينبج أنه يمكن

وصل مستقيمين بين النقطتين  $a$  و  $b$  وهو محال فعلى ذلك لا يمكن أن ينزل



على  $d$  من النقطة  $a$  العمود واحد

## القضية السادسة عشر

نظرية

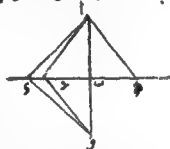
إذا أخذت نقطة مثل  $a$  خارج مستقيم مثل  $cd$  وانزل منها العمود  $ab$  على هذا المستقيم ثم مدها بحالة مواز على هذا المستقيم نفسه مثل  $ae, ad, ae$  فأولاً العمود  $ab$  يكون أقصر من كل ماثل

وثانياً المثلثان  $ade, adb$  الممتدان في جهتي العمود على بعدين متساويين  $cd, db$  يكونان متساويين

وثالثاً كل ماثلين مثل  $ade, adb$  أو مثل  $ae, ad$  امتدّا حيثما يراد يكون بعدهما عن العمود أطولهما

لنمد العمود  $ab$  بكية  $bo = ba$  ونوصل

$oe, od$



فأولاً المثلث  $ode$  يساوي المثلث  $odb$

لأن الزاوية القائمة  $dob = doe$  و  $bo = ba$  والضلع

$od$  مشترك بين المثلثين والضلع  $do = do$  فعلى مقتضى القضية

الخامسة يكون الضلع الثالث  $de$  مساوياً للضلع الثالث  $db$  وحيث أن

$ab$  وخط مستقيم فيكون أصغر من الخط المنكسر  $ade$  وعلى هذا يكون  $ab$

الذي هو نصف  $ade$  أصغر من  $ade$  الذي هو نصف  $ade$  وبهذا ثبت

ان العمود أقصر من كل ماثل

وثانياً اذا فرض  $b = c$  كان المثلث  $a b c$  مساوياً للمثلث  $a b c$  ( قضية ٥ ) لان الضلع  $a b$  مشترك بينهما والضلع  $b c = c b$  بالفرض والزوايا  $a b c = c b a$  فعلى ذلك يكون الضلعان  $a c$  و  $a c$  متساويين وبذا يثبت ان المائلين المتساويين البعد عن العمود متساويان

وثالثاً مجموع الخططين  $a d$  و  $c d$  في المثلث  $a d c$  أصغر من مجموع الضلعين  $a c$  و  $c d$  ( قضية ٨ ) فعلى ذلك يكون  $a d$  الذي هو نصف الخط  $a c$  أصغر من  $a c$  الذي هو نصف  $a c$  و وبذا يثبت ان المائل التي بعدها عن العمود أكبر تكون أكبر

( نتيجة ١ ) العمود يدل على البعد الحقيقي بين اى نقطة ومستقيم اذ هو أقصر من كل ماثل

( نتيجة ٢ ) لا يمكن أن يمد من نقطة واحدة الى مستقيم واحد ثلاث مستقيماً متساوية لانه لو امكن ذلك لوجدنا ثلاث متساويات في جهة واحدة من العمود وهو محال

### القضية السابعة عشر

نظريه

اذا نصف مستقيم مثل  $a b$  بالنقطة  $c$  واقیم منها العمود  $c d$  وعلى هذا المستقيم خارجاً كل نقطة من نقط العمود تكون على بعدين متساويين من نهايتي الخط  $a b$

(٢٥)

وثانياً كل نقطة خارجة عن العمود تكون على بعدين مختلفين من النهايتين  $ا$  و  $ب$   
(برهان ذلك) أولاً من حيث قد فرض أن  $ا > ب$

$= ح$  فان المائلين  $ا د$  و  $ب د$  يكونان متبايعين

عن العمود بعدين متساويين وبذا يكونان متساويين

ويكون الأمر كذلك بالنسبة للمائلين  $ا هـ$  و  $ب هـ$

وبالنسبة للمائلين  $ا و$  و  $ب و$  وهكذا وبذا يثبت ان كل نقطة من نقط العمود

تكون متباعدة ببعدين متساويين عن النهايتين  $ا$  و  $ب$

وثانياً لتكن  $هـ$  نقطة خارجة عن العمود فاذا وصل  $هـ ا$  و  $هـ ب$  فان أحدهما من

الخطين يقطع العمود في  $د$  واذا وصل  $د ب$  يكون  $د ب = د ا$  لكن الخط المستقيم

$هـ ب$  أصغر من الخط المنكسر  $هـ د + د ب$  و  $هـ د + د ب = د ا + د ب = ا د + د ب = ا ب$

فعلى ذلك يكون  $هـ ب > ا ب$  وبذا يثبت ان كل نقطة خارجة عن العمود تكون

على بعدين مختلفين من النهايتين  $ا$  و  $ب$

(تنبيه) يخصص اسم المحل الهندسي بكل خط جميع نقطه متمنعه بخاصية واحدة

لا يشترك فيها النقط الأخرى من المستوى

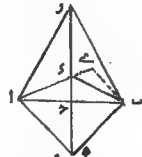
فعلى هذا يكون المستقيم  $و$  هو المحل الهندسي للنقط التي بعد كل منها عن

النقطتين  $ا$  و  $ب$  متساويان

## القضية الثامنة عشر

### نظريه

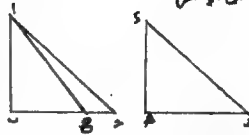
الثلثان القائم الزاوية يكونان متساويين متى تساوى وتر وضع من أحدهما النظيرين



(٤٦)

من الآخر

أى إذا فرض في المثلثين  $ا ب د$  و  $د ه و$  و  
القائمي الزاوية ان الوتر  $ا د = د و$  وان  
الضلع  $ا ب = د ه$  فان المثلثين المذكورين



يكونان متساويين

لانه لو ثبت تساوى الضلع الثالث  $ب د$  لنظيره  $ه و$  لاتفصح تساوى المثلثين  
فاذا فرض ان هذين الضلعين غير متساويين بان كان  $ب د$  مثلاً اكبرها يؤخذ  
 $ب ج = ه و$  ويرصل  $ا ج$  فالمثلث  $ا ب ج$  يصير مساوياً للمثلث  $د ه و$  لان  
الزاوية القائمة  $ب$  تساوى الزاوية القائمة  $ه$  والضلع  $ا ب = د ه$  والضلع  
 $ب ج = ه و$  فعلى مقتضى القضية الخامسة يكون هذان المثلثان متساويين واذن  
يكون  $ا ج = د و$  وحيث ان  $ا د = ا ج$  بالفرض فيكون  $ا د = ا ج$  لكن على مقتضى  
القضية السادسة عشر لا يمكن ان يكون المائل  $ا د$  مساوياً  $ا ج$  حيث ان بعده  
عن العمود  $ا ب$  اكبر فعلى ذلك لا يمكن ان يكون  $ب د$  مختلفاً عن  $ه و$  في  
المقدار بل يكون مساوياً له وبذا يكون المثلث  $ا ب د$  مساوياً للمثلث  $د ه و$

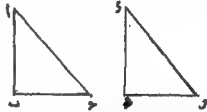
القضية التاسعة عشر

نظريه

المثلثان القائما الزاوية يكونان متساويين اذا تساوى وتر وزاوية حاده  
من احدهما لنظيرهما من الآخر

( ٢٧ )

ليكن  $\angle \alpha = \angle \beta$  والزاوية  $\angle \gamma = \angle \delta$  فاذا وضع المثلث  $\alpha \beta \gamma$  على  $\alpha \beta \gamma$  مع تطبيق  $\delta$  على  $\alpha$  فمحيثان الزاوية  $\angle \alpha = \angle \delta$  يأخذ  $\gamma$  اتجاه  $\beta$  وفي آن واحد يأخذ  $\gamma$  اتجاه  $\beta$  ولا يمكن تنزيل عمودين على  $\alpha \beta$  من  $\gamma$  ومن ذلك تقع النقطة  $\delta$  في  $\beta$  وبذا يتحد المثلثان مع بعضهما اتحاداً تاماً



### الخصيصة العشرون نظريه

كل نقطة مثل  $\alpha$  أخذت على منتصف زاوية مثل  $\beta \gamma \delta$  يكون بعدها عن ضلعي هذه الزاوية متساويين (منتصف زاوية ما هو المستقيم الذي يقسم هذه الزاوية الى قسمين متساويين)

وكل نقطة مثل  $\alpha$  أخذت في الزاوية  $\beta \gamma \delta$  وكان بعدها عن الضلعين  $\alpha \beta$  و  $\alpha \gamma$  متساويين توجد على منتصف هذه الزاوية

(برهان الامر الاول) ان ينزل من النقطة  $\alpha$  عمودان  $\alpha \delta$  و  $\alpha \epsilon$  على  $\beta \gamma$

و  $\alpha \beta$  بالتناظر فالمثلثان  $\alpha \beta \delta$  و  $\alpha \gamma \epsilon$

المقامعا الزاوية يكونان متساويين لان الوتر

$\alpha \delta$  مشترك بينهما والزاويتان  $\alpha \delta \beta$  و  $\alpha \delta \gamma$



متساويتان بالقرض فعلى ذلك يكون  $\alpha \delta = \alpha \epsilon$

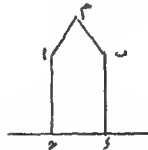
(٢٨)

(برهان الأهر الثاني) إذا بالعكس كان العمودان م د م ح متساويين  
فان المثلثين م ا د م ا ح القاعى الزاوية يكونان متساويين أيضا لان  
الوتر م ا مشترك بينهما والضلعا م د م ح متساويان بالفرض  
فعلى ذلك تكون الزاوية م ا د = م ا ح  
ومن هنا ينبج ان كل نقطة اخذت في الزاوية م ا د خارج المنصف ام يكون  
بعدها عن ضلعي الزاوية غير متساويين  
(تنبيه) منصف زاوية هو المحل الهندسى للنقط الداخلة في هذه الزاوية التى  
يكون بعدها كل منها عن ضلعي الزاوية متساويين

### تطبيقات المستقيمات المتوازية

#### الموضعية الحادية والعشرون نظريه

المستقيمان ا ب د و العمودان على مستقيم واحد د و يكونان متوازيين  
لانهما ان تلاقيا في نقطة مثل م لامتكن  
تنزيل عمودين من هذه النقطة على د و



٧ م هكذا احمد نجيب



## الفصلية الثانية والعشرون نظريه

كل نقطة يمكن أن يمد منها مستقيم يوازي مستقيماً معلوماً

لأنه إذا انزل العمود  $ab$  من النقطة  $a$  على  
 $b$  ومد من النقطة عينها العمود  $ac$  على  $c$   
 فإن المستقيمين  $ac$  و  $ab$  يكونان عمودين على  
 $ab$  وبذا يكونان متوازيين

ومن القضايا المسلمة من غير برهان أنه لا يمكن أن يمد من النقطة ما إلا  
 مستقيم واحد يوازي آخر

## الفصلية الثالثة والعشرون نظريه

إذا توازى مستقيمان مثل  $ab$  و  $cd$  فإن كل مستقيم عمود على أحدهما  $ab$

مثل  $ef$  يكون عموداً على الآخر  $cd$

من البديهي أولاً أن  $ef$  يقابل  $cd$   
 إذ يترتب على خلاف ذلك إمكان مدموزينين  
 للمستقيم  $ef$  من النقطة  $e$

وأما كون  $ef$  عموداً على  $cd$  فلأنه إن كان ما يلاؤه عليه أمكن أن يقام عمود  
 على  $ef$  من النقطة  $e$  وهذا العمود يكون موازياً للمستقيم  $ab$  وبذا يمكن

وجود مستقيمين مارين بالنقطة ج وكل منهما موازي ا ب

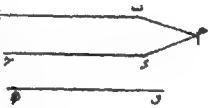
### الصفة الرابعة والعشرون

نظريه

المستقيمان ا ب و د الموازيان لثالث ه ويكونا

موازيين

لانه لو تقابل المستقيمان ا ب و د في نقطة  
مثل م لامن مد موازيين للسقيم ه و من النقطة م



### تعريف

اذا قطع مستقيمان مثل ا ب و د بقاطع مثل ه و وجد في تقاطع

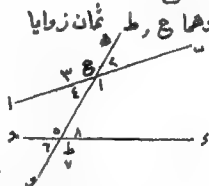
وهما ج ر ط ثمان زوايا

فالارباع زوايا (١) و (٤) و (٥) و (٨)

المحصورة بين المستقيمين ا ب و د تسمى

زوايا داخله والارباع زوايا الاخر تسمى زوايا

خارجة



وكل زاويتين وجدتا في جهتين مختلفتين بالنسبة للقاطع وكانتا داخليتين

غير متجاورتين مثل (١) و (٥) تسميان زاويتين متبادلتين داخليتين

وكل زاويتين مثل (١) و (٤) وجدتا في جهة واحدة من القاطع وكانت احدهما

داخله والاخرى خارجة ولم تكونا متجاورتين تسميان زاويتين متناظرتين

ثم ان كل زاويتين وجدتا في جهتين مختلفتين بالنسبة للقاطع وكانتا خارجيتين غير متجاورتين مثل (٤) و (٦) تسميان زاويتين متبادلتين خارجيتين

### الفصلية الخامسة والعشرون تطرية

اذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين  
فأولاً كل زاويتين متبادلتين داخليتين تكونان متساويتين  
وثانياً كل زاويتين متبادلتين خارجيتين تكونان متساويتين  
وثالثاً كل زاويتين متناظرتين تكونان متساويتين  
ورابعاً كل زاويتين داخليتين موجودتين في جهة واحدة من القاطع يكون  
مجموعهما يساوي زاويتين قائمتين

(الأمر الاول) ليكن  $ab$  و  $cd$  مستقيمين متوازيين مقطوعين بالقاطع  $هـ$  ط  
فاذا انزل العمود  $هـ$  م على  $ab$  من النقطة  $م$   
التي هي منتصف  $هـ$  و فانه يكون عموداً أيضاً  
على  $cd$  والمثلثان  $م هـ د$  و  $م هـ و$   
القائما الزاوية يكونان متساويين لان الزاويتين  
 $هـ م د$  و  $هـ م و$  متساويتان بالعل والزوايتان  $م هـ د$  و  $م هـ و$  متساويتان  
لقابلهما بالرأس ومن تساوي هذين المثلثين ينتج تساوي الزاويتين المتبادلتين  
الداخليتين  $م هـ د$  و  $م هـ و$

(٣٤)

ومن ذايركي ان الزاويتين  $\angle \text{د ه و}$  و  $\angle \text{د ب و}$  متساويتان لان كل واحد منهما  
مكمله لاحدى الزاويتين  $\angle \text{م ه و}$  و  $\angle \text{م ب و}$

(الامر الثاني) الزاويتان المتبادلتان الخارجتان  $\angle \text{د ب و}$  و  $\angle \text{د ح و}$  متساويتان  
لانهما مقابلتان برأسيهما للزاويتين المتبادلتين  $\angle \text{م ه و}$  و  $\angle \text{م ب و}$

(الامر الثالث) الزاويتان المتناظرتان  $\angle \text{د ب و}$  و  $\angle \text{د ح و}$  متساويتان لان  
 $\angle \text{د ب و} = \angle \text{د ا ه و}$  و  $\angle \text{د ا ه و} = \angle \text{د ح و}$   
(الامر الرابع) مجموع الزاويتين  $\angle \text{د ب و}$  و  $\angle \text{د ح و}$  يساوي زاويتين قائمتين لان  
 $\angle \text{د ب و} + \angle \text{د ا ه و} = \angle \text{د ا ه و} + \angle \text{د ح و} = \angle \text{د و}$

### الفصلية السادسة والعشرون نظريه

اذا (بعكس النظرية المتقدمة) أحدث قاطع مع مستقيمين زاويتين متبادلتين  
داخلتين متساويتين او زاويتين متبادلتين خارجيتين متساويتين او زاويتين  
متناظرتين متساويتين او زاويتين داخليتين في جهة واحدة من القاطع بمجموعهما  
يساوي زاويتين قائمتين فان المستقيمين المذكورين يكونان متوازيين

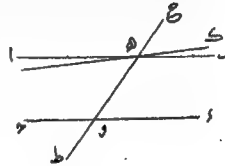
(الامر الاول) ليكن  $\text{ا ب}$  و  $\text{د ح}$  مستقيمين

مقطوعين بالقاطع  $\text{ج ط}$  فاذا كانت الزاويتان

المتبادلتان الداخليتان  $\angle \text{ا ه و}$  و  $\angle \text{د ب و}$

متساويتين فان  $\text{ا ب}$  يكون موازيا لـ  $\text{د ح}$

٨ م هندسه احمد نجيب



(٢٣)

لأنه ان لم يكن موازيا له امكن أن يمد من  $ه$  مستقيم  $هـ$  ل يوازي  $د$  وحيث  
تكون الزاويتان  $ل هـ و$  و  $هـ و د$  متساويتين لانهما متبادلتان داخلتان بحيث أن  
الزاوية  $ا هـ و = هـ و د$  بالفض تكون الزاوية  $ا هـ و = ل هـ و$  وهو باطل  
(الامر الثاني) اذا كانت الزاويتان المتبادلتان الخارجتان  $ج هـ د$  و  $د هـ و$   
متساويتين فان الزاويتين  $ا هـ و$  و  $هـ و د$  المقابلتين لهما برأسيهما تكونان متساويتين  
وعلى معنى ما تقدم اثباته يكون اب موازيا  $د$   
(الامر الثالث) اذا كانت الزاويتان المتناظرتان  $ج هـ د$  و  $هـ و د$  متساويتين  
فن حيث ان الزاوية  $ج هـ د = ا هـ و$  تكون الزاوية  $ا هـ و = هـ و د$  وبذا تكون  
اب موازيا  $د$

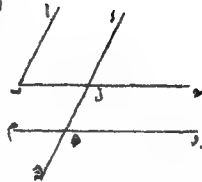
(الامر الرابع) اذا كان مجموع الزاويتين  $ب هـ و$  و  $هـ و د$  مساويا لزاويتين  
قائمتين فن حيث أن  $ب هـ و + ا هـ و = د هـ و$  ينتج ان  $ا هـ و = هـ و د$   
وبذا يكون اب موازيا  $د$

## الفصلية السابعة والعشرون نظريه

الزاويتان اللتان اضلاعهما متوازية تكونان اما متساويتين واما مكملتين لبعضهما  
اولا ليكن اب  $د$  و  $هـ و$  زاويتين اضلاعهما متوازية وبقية الزاوية واحدة ولحاجه  
فها ان الزاويتان تكونان متساويتين لان الزاويتين  $د ل هـ و$  و  $هـ و د$  متساويتان  
بما انهما متناظرتان والزاوية  $د ل هـ و = ا ب د$  بالدليل عينه فعلى هذا تكون

(٣٤)

الزاوية  $ا ب د = د ه و$   
 ثانياً لكن  $ا ب د$  و  $م ه و$  زاويتين  
 اضلاعهما متوازية وبمجهه الى جهتين  
 متضادتين فهما زاويتان تكونان متساويتين



لان  $م ه و = د ه و$  و  $د ه و = ا ب د$   
 ثالثاً الزاويتان  $ا ب د$  و  $د ه و$  المثلثان اضلاعهما متوازية لكن اثنتين منهما  
 $ا ب د$  و  $م ه و$  متجهتان الى جهة واحدة والضلعان الآخران  $د ه و$  و  $م ه و$  متجهتان  
 الى اتجاهين متضادين تكونان مكملتين لبعضهما لان  $م ه و$  مكمل للزاوية  
 $د ه و$  وان الزاوية  $د ه و = ا ب د$

### القضية الثامنة والعشرون نظريه

الزاويتان اللتان اضلاعهما المتناظرة متعامدة تكونان اما متساويتين واما  
 مكملتين لبعضهما  
 لكن  $ا ب د$  و  $د ه و$  زاويتين اضلاعهما  
 المتناظرة متعامدة ولتد من النقطة  $ا$  مستقيماً  
 الى عموداً على  $ا ب$  ومستقيماً  
 الى عموداً على  $ا د$  فالمستقيمان  $ا ب$  و  $ا د$  يكونان موازيين للمستقيمين  $د ه و$   
 و  $د ه و$  على التناظر ومتجهتان معهما الى جهة واحدة وبذا تكون الزاوية  $ا ب د$



( ٣٥ )

مساوية للزاوية د هـ و لكن

$$ع ا ط + ط ا ب = ا د$$

$$و ب ا + ا د + ط ا ب = ا د$$

فعلى ذلك تكون الزاوية ع ا ط = ب ا د

( تنبيه ) اذا اعتبرت الزاوية المحاذية من المستقيم هـ و وامتداد د هـ يرى

ان الزاوية ر هـ ج مكملة للزاوية ب ا د

القضية التاسعة والعشرون

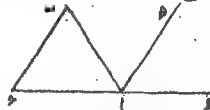
نظريه

مجموع زوايا اى مثلث يساوى زاويتين قائمتين

لانه اذا مقل المستقيم ا د موازياً ب د ومقل

ا د على استقامته فان الزاويتين ا د ب و

ا د هـ تكونان متساويتين لانهما متناظرتان



بالنسبة للمستقيمين المتوازيين ب د و هـ ا المقطوعين بالقاطع ا د والزاويتان

ا د ب ا د هـ تكونان متساويتين أيضاً لانهما متبادلتان داخلتان

بالنسبة للمستقيمين المتوازيين ب د و هـ ا وللقاطع ا ب فعلى ذلك يكون

مجموع زوايا المثلث مساوياً لمجموع الثلاث زوايا ا ب د ب ا د هـ ا د

المتشكلة حول النقطة ا في جهة واحدة من المستقيم ا د بحيث ان هذا المجموع

الاخير يساوى د هـ فيكون مجموع زوايا المثلث يساوى د هـ أيضاً

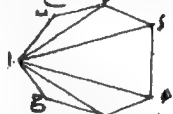
(٣٦)

- (نتيجة ١) لا يمكن ان يوجد في أى مثلث الزاوية قائمة ولحد ومن باب أولى لا يوجد فيه الزاوية منفرجة ولحد  
 (نتيجة ٢) أى مثلث قائم الزاوية مجموع زاويتي الحادتين يساوى قائمة ولحد  
 (نتيجة ٣) متى علمت زاويتان من مثلث أو علم مجموعهما فقط استحصل على الزاوية الثالثة بطرح هذا المجموع من زاويتي قائمتين  
 (نتيجة ٤) الزاوية الخارجية  $\alpha$  لكادئة من المضلع  $n$  وامتداد  $\beta$  تساوى مجموع الزاويتين الداخلتين  $\gamma + \delta$

## القضية الثلاثون نظريه

مجموع الزوايا الداخلة في أى مضلع محدب يساوى قائمتين مكررتين بقدر ما فيه من الاضلاع الاثنيتين

لانه اذا وصل من احدى الرؤس  $\alpha$  أقطار لجميع الرؤس الغير مجاورة لهذا الرأس فان المضلع يتحلل بتلك الى مثلثات عددها كعدد الاضلاع الاثنيتين



اذ يمكن اعتبار هذه المثلثات مشتركة في الرأس  $\alpha$  وقواعد ها اضلاع المضلع  
 ما عدا المثلثين النهائيين فان كلا منهما يحتمل على ضلعين من اضلاع المضلع  
 ويشاهد أيضاً أن مجموع زوايا هذه المثلثات يساوى مجموع زوايا المضلع فعلى  
 ذلك يكون هذا المجموع الاخير مساوياً قائمتين مكررتين بقدر اضلاع المضلع

٩ م شكرا محمد نجيب



الاثنتين فاذا جعل  $\delta$  رمزاً لعدد اضلاع المضلع فان مجموع زواياه يكون  
عبارة عن  $\delta \times (2 - 2)$  أو عن  $\delta - 2$

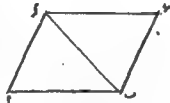
## الخصيصة الحادية والثلاثون

### نظريه

كل ضلعين متقابلين من متوازي الاضلاع يكونان متساويين وكذا كل زاويتين  
متقابلتين من زواياه

لانه اذا وصل القطر  $د$  كان هذا القطر ضلعاً  
مشتركاً بين المثلثين  $ا د ب$  و  $د ح$  وزيادة على  
ذلك فانه بسبب توازي  $ا د$  و  $ب ح$  تكون الزاوية  
 $ا د ب = د ح$  (قضية ٥) وانه بسبب توازي  
 $ا ب$  و  $د ح$  تكون الزاوية  $ا د ب = د ح$  فعلى هذا يكون المثلثان  $ا د ب$   
و  $د ح$  متساويين (قضية ٦) وبهذا يكون الضلع  $ا ب$  المقابل للزاوية  
 $ا د ب$  مساوياً للضلع  $د ح$  المقابل للزاوية المساوية لها  $د ح$  وأيضاً يكون  
الضلع الثالث  $ا د$  مساوياً للضلع الثالث  $ب ح$  فثبت ان يكون كل ضلعين  
متقابلين من متوازي الاضلاع متساويين

واما كون كل زاويتين متقابلتين من متوازي الاضلاع متساويتين فهو لانه لما  
كان المثلثان المذكوران متساويين كانت الزاوية  $١ = ٢$  وايضاً الزاوية  
 $ا د ب$  المركبة من  $ا د ب$  و  $د ح$  متساوية للزاوية  $ا د ح$  المركبة من



( ٣٨ )

د ب ح ا ب د

(نتيجة ١) المستقيمان المتوازيان ا ب و د المحصوران بين مستقيمين

متوازيين آخرين ا د و ب يكونان متساويين

(نتيجة ٢) كل مستقيمين متوازيين يكونان على ابعاد متساوية في جميع امتدادها

لانه اذا كان د ر ا ب مستقيمين

متوازيين وانزل من القاطنتين ج و ط

عمودان ج و ط ه على ا ب فان

هذين العمودين يكونان متوازيين ثم انهما يكونان متساويين لداعي كونهما

محصورين بين مستقيمين متوازيين

## القضية الثانية والثلاثون

نظريه

في أي شكل رباعي مثل ا ب د ه اذا كان كل ضلعين متقابلين متساويين أي

اذا كان  $ا ب = د ه$  و  $ب د = ا ه$  فان الاضلاع المتساوية تكون متوازية

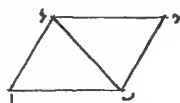
وبذا يكون الشكل المذكور متوازي الاضلاع

لانه اذا وصل القطر د ه كانت الاضلاع المتناظرة

في المثلثين ا ب د و د ه ب متساوية وبذا يكونان

متساويين ومن تساويهما تكون الزاوية ا د ب

المقابلة للضلع ا ب متساوية للزاوية د ب د المقابلة للضلع د ه فعلى



(٢٩)

مقتضى القضية السادسة والعشرون يكون الضلع  $ا د$  متوازيًا للضلع  $ب ح$   
وبمثل هذا يبرهن على أن  $ا ب$  يوازي  $د ح$  ومن حيثئذ يكون الشكل  $ا ب ح د$   
متوازي الاضلاع.

### القضية الثالثة والثلاثون نظريه

إذا كان ضلعان متقابلان  $ا ب د ح$  من شكل رباعي متساويين ومتوازيين  
فإن الضلعين الآخرين يكونان متساويين ومتوازيين أيضًا ويكون الشكل  
 $ا ب ح د$  متوازي الاضلاع

لأنه إذا وصل القطر  $ب د$  حدث مثلثان  $ا ب د$  و  
 $ب ح د$  فيهما الضلع  $ب د = د ب$  بالفرض والضلع  
 $ب د$  مشترك بينهما والزاوية  $ا ب د = د ب ح$   
لان  $ا ب$  يوازي  $د ح$  فعلى مقتضى النظرية الخاصة يكون المثلثان المذكوران  
متساويين ومن تساويهما يكون الضلع  $ا د = د ح$  والزاوية  $ا د ب = د ح ب$   
ومن تساوي الزاويتين يكون  $ا د$  موازيًا  $ب ح$  وبذا يكون الشكل  $ا ب ح د$  متوازي الاضلاع

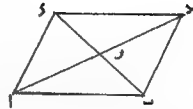


### القضية الرابعة والثلاثون نظريه

قطر متوازي الاضلاع وهما  $ا ح$  و  $ب د$  ينصفان بعضهما  
لأنه من مقارنة المثلث  $ا د ب$  بالمثلث  $ب ح د$  يرى أن الضلع  $ا د = د ح$

(٤٠)

والزاوية  $\angle د و ب = \angle د و ا$  (قضيه ٥) والزاوية  
 $\angle ا و ب = \angle ا و د$  وبذا يكون المثلثان المذكوران  
 متساويين (قضيه ٦) ومن تساويهما يكون



الضلع  $ا و$  المقابل للزاوية  $\angle د و ب$  مساوياً للضلع  $و د$  المقابل للزاوية  $\angle ا و ب$   
 وايضاً يكون  $د و = و ب$

(تنبيه) من حيث ان الضلعين  $ا ب$  و  $د و$  يكونان متساويين في حالة المعين  
 فان الاضلاع المناظرة في المثلثين  $ا و ب$  و  $د و ب$  تكون متساوية وبذا يكون  
 هذان المثلثان متساويين ومن هذا ينتج ان الزاوية  $\angle ا و ب = \angle د و ب$  وحشي  
 يشاهد ان قطري المعين يتقاطعان مع بعضهما على زوايا قائمه



## المقالة الثانية في الدائرة وفي قياس الزوايا

### تعريف

(بدا) محيط الدائرة خط منحني جميع نقطه على ابعاد متساوية من نقطة داخلية تسمى مركزاً

والدائرة هي جزء المستوي المحاط بهذا الخط المنحني  
(١) كل خط مستقيم مثل  $ح ا$  أو  $د ه$  أو  $د ز$



أو  $د ح$  وصل بين المركز ونقطة من المحيط يسمى نصف قطر وكل خط مثل  
 $ا ب$  يمر بالمركز وانتهى من الطرفين بالمحيط يسمى قطراً  
وعلى مقتضى تعريف الدائرة تكون انصاف الاقطار كلها متساوية وتكون الاقطار  
أيضاً كلها متساوية وأضعافاً لنصف القطر

(٣) القوس جزء من المحيط مثل  $و ج ط$

ودور القوس هو الخط المستقيم  $ط و$  الواصل بين نهايتيه

(٤) قطعة الدائرة جزء من سطحها محصور بين قوس ودوره

(نتيجه) الدور الواحد  $ط و$  يقابله دائماً قوسان  $و ج ط$  و  $ج ط و$  وعلى هذا  
يقابله قطعتان أيضاً لكنه ان لم يذكر القوس الاكبر أو القطعة الكبرى على روجه

التخصيص فالوفهم من ذلك سوى القوس الأصغر

(٥) القطع هو جزء من الدائرة محصور بين قوس مثل  $\delta$  ونصفي القطرين

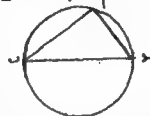
$\alpha, \epsilon$  الواصلين لنهايتي هذا القوس

(٦) الخط الذي ينها بناء على المحيط كالمخط  $\alpha$  يسمى خطاً مرسوماً في الدائرة

والزاوية التي رأسها على المحيط وضلعاهما وزان

كالزاوية  $\alpha$   $\alpha$  تسمى زاوية محيطية أو زاوية مرسومة

في الدائرة



والمثلث الذي رأسه على المحيط كالمثلث  $\alpha$  يسمى مثلثاً مرسوماً في الدائرة

وعلى العموم كل شكل وجدته جميع رؤس زواياه على المحيط يسمى شكلاً مرسوماً في

الدائرة ويقال أيضاً أن الدائرة مرسومة على هذا الشكل

(٧) القاطع خط يقابل المحيط في نقطتين كالمخط  $\alpha$

(٨) المماس هو مستقيم لا يشترك مع محيط الدائرة

إلا في نقطة واحدة كالمستقيم  $\epsilon$

والنقطة المشتركة  $\delta$  تسمى نقطة التماس



(٩) وكذلك محيط الدائرتين يكونان متماسين إذا لم يشتركا إلا في نقطة واحدة

(تنبيه) المستقيم المماس للخطين على وجه العموم هو نهاية الاوضاع التي يأخذها

قاطع مثل  $\alpha$  بدور محله نقطة من المماس مثل  $\alpha$  حتى إن نقطة ثانية من نقط

القاطع تأتي وتتحد مع النقطة المذكورة

فإذا كان المنحنى مقعولاً ولم يكن ان  
 يقابله مستقيم في أكثر من نقطتين  
 كحيط الدائرة فمن البديهي انه متى  
 اجتمعت نقطتا التقاطع في نقطة واحدة  
 فلا يكون المستقيم مشتركاً مع المنحنى الا في نقطة واحدة واذن يمكن عند الارادة  
 تعريف المماس بأنه مستقيم لا يشترك مع المنحنى الا في نقطة واحدة لكن التعريف  
 الاول بليق دون غيره بجميع النواع المنحنيات حتى بحيط الدائرة وله المزية في اظهار  
 بعض امور مهمة تضاهي بعضها في جملة نظريات

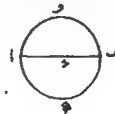


(١٠) المضلع يكون مرسوماً على دائرة اذا كانت جميع اضلاعه مماسة لحيط الدائرة  
 وفي هذه الحالة يقال أيضاً أن الدائرة  
 مرسومة في المضلع المذكور



## القضية الأولى نظريه

كل قطر مثل  $ا ب$  يقسم كلامن الدائرة ومحيطها الى قسمين متساويين  
 لانه اذا طبق الشكل  $ا ب$  على  $ا ب$  يجعل  $ا ب$  قاعدة مشتركة  
 يلزم ان الخط المنحني  $ا ب$  يقع بالضبط  
 على الخط المنحني  $ا ب$  اذ بخلاف ذلك سيوجد



(٤٤)

فيهما تقطع غير متساوية البعد عن المركز وهو بخلاف تعريف الدائرة

### القضية الثانية

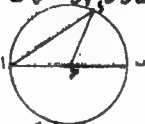
نظريه

كل وتر فهو أصغر من القطر

لأنه إذا وصل النصف قطرين  $ا، ب$  و  $ب، ج$  الى نهايتي

الوتر  $ا، ج$  كانت الخط المستقيم  $ا، ب > ب، ج > ا، ج$

أى  $ا، ب > ا، ج$



(نتيجة) يتبع مما ذكر ان أكبر خط مستقيم يمكن رسمه في الدائرة يساوى قطرها

### القضية الثالثة

نظريه

أى خط مستقيم لا يقابل محيط الدائرة في أكثر من نقطتين

لأنه لو قابل في ثلاثة نقط كانت هذه النقط الثلاث متساوية البعد عن المركز

وبذا يوجد ثلاث مستقيمت متساوية واصلة من نقطة واحدة الى ثلاث

نقط على مستقيم واحد وهو محال (قضية ١٦ مقاله ١)

### القضية الرابعة

نظريه

في دائرة واحدة أو في دوائر متساوية الأقواس المتساوية أو تارها متساوية

وبالعكس أى الأوتار المتساوية أقواسها متساوية

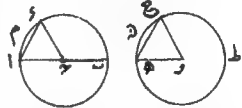


فإذا كان نصف القطر  $اد$  مساوياً لنصف القطر  $هـ و$  وفرض أن القوس  $ام$  و

يساوي القوس  $هـ دج$  فإن الوتر  $ا د$

يكون مساوياً للوتر  $هـ ج$

لأنه لما كان القطر  $اب$  مساوياً للقطر  $هـ ط$



يمكن تطبيق نصف الدائرة  $ام د$  بالضغط على نصف الدائرة  $هـ دج ط$  ولنخط

المماس  $ام د$  و  $ب$  يتحد بالخط مع الخط المماس  $هـ دج ط$  لكن حيث أن الوتر

$ام د = هـ دج$  بالفرض فتقع النقطة  $د$  على النقطة  $ج$  وبذا يكون الوتر

$ا د$  مساوياً للوتر  $هـ ج$

وبالعكس إذا كان الوتر  $ا د = هـ ج$  بفرض أن نصف قطر  $اد$  لم يزل مساوياً

$هـ و$  فإن القوس  $ام د$  يكون مساوياً للقوس  $هـ دج$

لأنه إذا مدّا النصفين  $قطرين د د$  وج كانت أضلاع المثلثين  $اد د$  و  $هـ دج$

متساوية على التناظر أي  $اد = هـ و$  و  $د د = د د$  وج  $ا د = هـ ج$  وبذا يكون

هذان المثلثان متساويين (قضية ١١ مقالة ١) فإذا وضع النصف دائرة

$ا د$  على مساوية  $هـ ج ط$  فإن نصف القطر  $د د$  يقع على نصف القطر  $وج$

لذا أي أن الزاوية  $اد د = هـ و ج$  وإذا نزع النقطة  $د$  على النقطة  $ج$  وبهذا

يكون القوس  $ام د$  مساوياً للقوس  $هـ دج$

## القضية الخامسة نظرية

في دائرة واحدة أو في دوائر متساوية القوس الأكبر وتره أكبر وبالعكس أي الوتر الأكبر

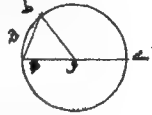
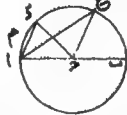
(٤٦)

قرسه أكبر ويشترط في ذلك أن يكون كل من الأقسام الجارية اعتبارها أقل

من نصف المحيط

لأنه إذا كان القوس  $ام$  أكبر من

القوس  $هـ ط$  ولخذ قوس  $ام$  و



$هـ ط = ط$  فإن الوترين  $اد$  و  $هـ ط$  يكونان متساويين وإذا وصل نصف القطرين

$د$  و  $هـ ط$  فإن الضلعين  $اد$  و  $هـ ط$  من المثلث  $اد هـ$  يكونان متساويين

للضلعين  $اد$  و  $هـ ط$  من المثلث  $اد هـ$  وحيث أن الزاوية  $اد هـ < اد هـ$

فالضلع الثالث  $هـ ط$  يكون أكبر من الضلع الثالث  $اد$  وأيضاً يكون

$اد < هـ ط$

وبالعكس إذا كان الوتر  $اد < هـ ط$  فإن القوس  $ام$  يكون أكبر من  $هـ ط$

لأنه إذا كان  $ام$  مساوياً  $هـ ط$  كان الوتر  $اد$  مساوياً  $هـ ط$  وهو

بخلاف الفرض وإذا كان القوس  $ام > هـ ط$  كان الوتر  $اد > هـ ط$

وهو بخلاف الفرض أيضاً

(تنبيه) قد فرض أن كل من الأقسام الجارية اعتبارها أقل من نصف المحيط

فإذا كان كلا منها أكبر من نصف المحيط كان الأمر بعكس ما ذكر

## القضية السادسة نظريه

النصف قطر  $م$  العمود على وتر مثل  $اب$  يقسم كل من هذا الوتر والقوس

١٠ ب الوتر به الى قسمين متساويين

لانه اذا وصل النصف قطر م ا ر م فانها  
يصيران مائتين متساويين بالنسبة للعمود م د  
وبذا يكونان متباعدين عن العمود ببعدين متساويين



( قضية ١٦ مقالة ١ ) فعلى ذلك يكون  $ا د = ب د$

واما كون نصف القطر المذكور ينصف القوس ا د ب فلاله من حيث أن  $ا د = ب د$  يكون م د عمودا على منتصف ا ب واذن ( قضية ١٧ مقالة ١ )  
يجب ان تكون كل نقطة من نقط هذا العمود متساوية البعد عن النهايتين  
ا د ب وحيث ان د احدى هذه النقط فيكون البعد ا د = ب د لكن اذا كان  
الوتر ا د مساويا للوتر ب د يكون القوس ا د مساويا للقوس ب د ( قضية )  
فعلى ذلك يكون النصف قطر م د العمود على الوتر ا ب قاسما للقوس  
الوتر به الى قسمين متساويين في النقطة د

( تنبيه ) فاعلم ان المستقيم م د يمر بالمركز ويمتصف القوس وانه عمود  
على الوتر فمن حيث ان اثنين من هذه الشروط يكفيان في تعيين المستقيم  
يعلم من ذلك ان كل خط مستقيم ا د في بشرطين من هذه الشروط لا بد من  
كونه يحقق الشرطين الاخرين

وعلى هذا اذا العمود المقام على منتصف وتر يمر بالمركز ويمتصف القوس  
وقس على هذا

## القضية السابعة زظريه

كل ثلاث نقط ليست على خط مستقيم كما لنقط ا، ب، ج يمكن دائماً ان يمر بها  
محيط دائرة ولا يمكن ان يمر بها الا بمحيط واحد

لفصل ا، ب، ج ولنقيم العمودين د ه، ر و ط  
على مستقي هذين المستقيمين هذان العمودان يتلاقيان  
لانهما اذا كانا متوازيين فانهما خطين ب، ا، ر ج



المتدين من النقطة ب بالعماد على هذين للتوازيين يكونا على امتداد بعضهما  
وهو بخلاف الفرض

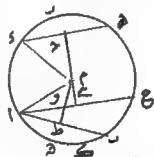
اذا قرر ذلك فان النقطة م التي يتقابل فيها المستقيمان د ه، ر و ط تكون  
على بعدين متساويين من النقطتين ا، ب اذ هي على العمود د ه، وحيث ان  
النقطة عينها توجد على العمود و ط فانها تكون على بعدين متساويين من النقطتين  
ب، ج واذن تكون الابعاد م، ا، م، ب، م ج متساوية وبما عكسه  
فالمحيط المرسوم من المركز م ينصف القطر ب يمر بالثلاث نقط ا، ب، ج  
وزيادة على ذلك انه لا يمكن ان يمر بمحيط دائرة اخرى بالنقط الثلاث  
المذكورة لانه اذا مر بها محيط آخر يجب وجود مركزه على الخطين د ه، ر و ط  
في آية واحدة وحيث انه لا يمكن تقاطع هذين المستقيمين الا في نقطة واحدة  
صار الامر المذكور متبوعاً

(نتيجة ١) حيث ان النقطة م متساوية البعد عن ا و د فان العود المقام على منتصف ا د يمر بها ومن هنا ينتج ان الامتداد القائمة على منتصف ا ب اضلاع أى مثلث تتقاطع في نقطة واحدة  
(نتيجة ٢) محيط أى دائرتين لا يمكن اشتراكهما في اكثر من نقطتين بدون ان يتحدا ويصيرا محيطا واحدا

## القضية الثامنة نظريه

الوتران المتساويان بعداهما عن المركز متساويان والوتران الغير متساويين اصغرهما البعدهما عن المركز

اولاً اذا كان الوتر ا ب = د ه وقسم كل منهما الى قسمين متساويين بالعودين م ط ر م د ووصل النصف قطر م ا ر م د فان المثلثين م ا ط ر م د قائم الزاوية يكونان متساويين لان وتريهما م ا ر م د متساويان والضلع ا ط الذى هو نصف ا ب يساوى الضلع د ه الذى هو نصف د ه ومن تساوى هذين المثلثين يكون الضلع الثالث م ط مساوياً للضلع الثالث م د وبذا اثبت الامر الاول وهو كون بعدى الوترين المتساويين ا ب د ه عن المركز متساويين

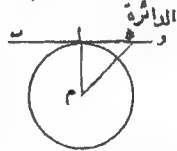


ثانياً اذا كان الوتر  $اج$   $\angle$   $د$ ه فان القوس  $اكح$  يكون اكبر من القوس  $دز$ ه  
 (قضية ه) فاذا أخذ من القوس  $اكح$  جزء  $اه = ب = دز$ ه ووصل الوتر  
 $اب$  وانزل العمود  $م$  ط على هذا الوتر والعمود  $م$   $ه$  على  $اج$  فن  
 الواضح ان  $م$  ط يكون اكبر من  $م$  و  $م$  و  $ك$   $م$   $ه$  ومن باب أولى يكون  
 $م$  ط  $ك$   $م$   $ه$  لكن  $م$  ط  $= م$   $د$  لداعي ان الوترين  $اب$  و  $د$ ه متساويان  
 فعلى ذلك يكون  $م$   $د$   $ك$   $م$   $ه$  وحينئذ يكون أصغر الوترين الغير المتساويين  
 أبعدهما عن المركز

## القضية التاسعة نظريه

العمود  $ب$  و المقام على نصف القطر  $م$   $ا$  من نهايته  $ا$  يكون مماساً لمحيط

لأن كل ماثل مثل  $م$   $ه$  اطول من العمود  $م$   $ا$  فعلى  
 هذا تكون النقطة  $ه$  خارجة عن محيط الدائرة واذن  
 لا يكون للمستقيم  $ب$  و نقط مشتركة مع المحيط الا



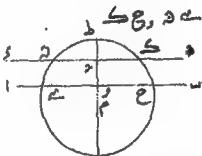
النقطة  $ا$  وبذا يكون  $ب$  و مماساً  
 وبالعكس نصف القطر  $م$   $ا$  الراصل لنقطة التماس  $ا$  يكون عموداً على المماس  $ب$  و  
 لانه لما كانت جميع نقط هذا الخط ماعدا النقطة  $ا$  خارجة عن المحيط فان  
 نصف القطر  $م$   $ا$  يكون أقصر خط ممكن مله من النقطة  $م$  الى المستقيم  $ب$  و

وبذا يكون عموداً على هذا المستقيم  
(نتيجة) أي نقطة من محيط الدائرة كالنقطة  $ا$  لا يمكن أن يمد منها إلا  
مماس واحد لهذا المحيط

## القضية العاشره نظريه

المستقيمان المتوازيان  $ا ب$  و  $د ه$  يحصران بينهما من المحيط قوسين متساويين

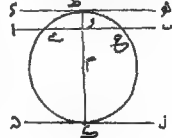
من  $د$  وج  $ط$   
لأنه لا بد في هذه القضية من وقوع حالة  
من الحالات الثلاث الآتية  
(الحالة الأولى) أن يكون المستقيمان المتوازيان



قاطعين لمحيط الدائرة فإذا مدّ النصف قطرم ط العمود على الوتر  $د ه$  فإنه  
يكون في  $ا ب$  واحد عموداً على موازيه  $د ه$  وعلى ذلك تكون النقطة ط  
منتصف كل من القوسين  $د ط$  و  $ط ه$  (قضية) وبذا يكون القوس  $د ط$   
=  $ط ه$  والقوس  $د ط = ط ه$  ومن ذلك ينتج أن  $د ط = ط ه$   
ط ك أي أن  $د ه = ط ك$

(الحالة الثانية) أن يكون أحد المستقيمين المتوازيين

$ا ب$  و  $د ه$  قاطعاً والآخر مماساً فإذا وصل النصف  
قطرم ط إلى نقطة التماس ط فإن النصف قطر



المذكور يكون عموداً على المماس  $د ه$  ( قضيه ٩ ) ويكون عموداً على موازيه  $ع ح$   
 لكن حيث كان  $م$  ط عموداً على الوتر  $ع ح$  فاذا النقطة  $ط$  تكون منتصف  
 القوس  $ع ط ح$  فعلى ذلك يكون القوسان  $ع ط$  و  $ط ح$  المحصوران بين  
 المتوازيين  $ا ب$  و  $د ه$  متساويين

( الحالة الثالثة ) ان يكون المستقيمان المتوازيان  $د ه$  و  $ا ب$  مماسين  
 لمخيط الدائرة احدهما في  $ط$  وثانيهما في  $ك$  فاذا مَدَّ القاطع  $ا ب$  الموازي  
 لهما فانه على مقتضى ما تقدم يكون  $ع ط = ط ح$  و  $ع ك = ك ح$  واذن  
 يكون القوس الكلي  $ط ع ك = ك ح ط$  و زيادة على ذلك يشاهد ان  
 كلا من هذين القوسين عبارة عن نصف المحيط

### القضية الحادية عشر نظريه

اذا اشتراك محيط دائرتين في نقطة مثل  $ا$  خارجة عن المستقيم  $م م$  الواصل  
 بين مركزيهما فالابد من اشتراكهما أيضاً في نقطة ثانية  $ا$  من العود  $ا ب$   
 المنزل على  $م م$  بحيث يكون بعدا النقطتين  $ا$  و  $ا$  عن هذا المستقيم متساويين  
 وذلك لانه اذا كان المستقيمان  $ا ب$  و  $ا ب$



متساويين فان المستقيمين  $م ا$  و  $م ا$  يكونان  
 متساويين بما انهما مائلاّن متساويي البعد عن موقع  
 العمود  $م ب$  على المستقيم  $ا ا$  واذن فالدائرة المرسومة من المركز  $م$  بالنصف قطر  $م ا$  تمر



بالنقطة أ وبمثل هذا يشاهد ان الدائرة المرسومة من المركز م' بالنصف قطر  
م' أ يجب مرورها بالنقطة أ

(نتيجة ١) اذا تقاطع محيطا دائرتين فان الخط الراصل بين مركزيهما يكون عموداً  
على منتصف الوتر المشترك بين المحيطين

(نتيجة ٢) اذا تماس محيطا دائرتين فان نقطة التماس تكون موجودة على خط  
المركزين اذ بخلاف ذلك يشترك المحيطان المذكوران في نقطتين ويكونا متقاطعين  
أي محيطي دائرتين لا يمكن ان يكونا موضوعين بالنسبة لبعضهما الا بأحد  
الأوضاع الآتية وهي اما ان يكونا متبايعين في الخارج أو في الداخل أو يكونا متماسكين  
في الخارج أو في الداخل أو يكونا متقاطعين

### القضية الثانية عشر

نظر به

محيطا الدائرتين المتباعدان في الخارج يكون بعد مركزيهما أكبر من مجموع نصف  
قطريهما لانه يحدث

$$م' م' > م' أ + م' ب$$

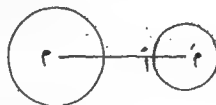
ومن هذا يحدث

$$م' م' < م' أ + م' ب$$

### القضية الثالثة عشر

نظر به

محيطا الدائرتين المتباعدان في الداخل يكون البعد بين مركزيهما أصغر من



من فرق نصفى قطريهما

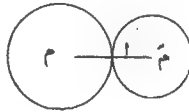
لأنه يحدث  $م م = م - ١م - ١م - ١١$   
ومن هذا يحدث  $م م > م - ١م - ١م - ١$



القوسية الرابعة عشر  
نظريه

محيطا الدائرتين المتماسات في الخارج يكون بعد مركزيهما مساويا لمجموع نصفى  
قطريهما

لأنه لما كانت نقطة التماس ١ موجودة  
على خط المراكزين يحدث بالبداية  
 $م م = م + ١م + ١م$

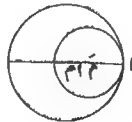


القوسية الخامسة عشر  
نظريه

محيطا الدائرتين المتماسات في الداخل يكون بعد مركزيهما مساويا لفرق نصفى  
قطريهما

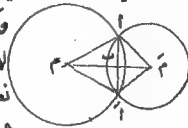
لأن نقطة التماس ١ موجودة على خط المراكزين  
وبذا يكون

$$م م = م - ١م - ١م$$



## القضية السادسة عشر نظريه

مخطط الدائرتين المتقاطعان يكون بعد مركزيهما أصغر من مجموع نصفي قطريهما  
وأكبر من فرقيهما



لأنه إذا وصل مستقيمان بين المراكزين وأحدى  
نقطتي التقاطع  $\alpha$  مثلاً حدث مثلث أضلاعه  
هي خط المراكزين م م والنصفا قطريين

م ا م  $\alpha$  ومن المعلوم أن أي ضلع من المثلث أصغر من مجموع الضلعين الآخرين  
وأكبر من فرقيهما

(نسبيه) عكس كل من النظريات الخمس المتقدمة صحيح ويبرهن على كل منها  
بطريقة واحدة فإذا فرض مثلاً أن بعد المراكزين أصغر من مجموع نصفي القطرين  
وأكبر من فرقيهما فإن محيطي الدائرتين يكونان متقاطعين لأنهما إذا كانا  
متباعدين في الخارج كان بعد المراكزين أكبر من مجموع نصفي القطرين وإذا كانا  
متبايعين في الداخل كان بعد المراكزين أصغر من فرق نصفي القطرين وإذا كانا  
متماسين كان بعد المراكزين مساوياً لمجموع نصفي القطرين أو لفرقيهما

## القضية السابعة عشر نظريه

في دائرة واحدة أو في دائرتين متساويتين مركزيتين متساويتين مثل م م -

و د ه يكون قوساها ا ب و د ه متساويين  
وبالعكس اذا كان القوسان ا ب و د ه متساويين كانت الزاويتان ا م ب  
و د م ه متساويتين

(بمهان ذلك) أولاً اذا فرض ان الزاوية ا م ب مساوية للزاوية د م ه  
فانه يمكن تطبيق احدهما على الاخرى بحيث

ان اضلاعهما متساوية من الواضح ان النقطة ا  
تقع على د والنقطة ب على ه وحسب  
يتحد القوس ا ب مع القوس د ه لانه ان لم يتحد ا ب يصير قوساً واحداً لو وجد  
فيها نقط غير متساوية البعد عن المركز وهو محال فعلى ذلك يكون القوس

ا ب = د ه

ثانياً اذا فرض ان القوس ا ب = د ه فانه الزاوية ا م ب تكون مساوية  
للزاوية د م ه لانه ان لم تكن هاتان الزاويتان متساويتين وفرض ان ا م ب  
أكبرها ولخذب الزاوية ا م و = د م ه فانه بمقتضى ما تقدم يكون القوس  
ا ب = د ه وحيث ان القوس ا ب = د ه بالفرض فيكون القوس ا ب = د ه  
أي يكون الجزء مساوياً للكل وهو محال فعلى ذلك تكون الزاوية ا م ب = د م ه

### الخصيصة الثامنة عشر

زط ر ه

في دائرة ولحلل أ ب في دائرة متساوية النسبة بين أي زاويتين مركزيتين

أ ب ح د

هـ

م

١٤

كالنسبة بين القوسين المحصورين بين اضلاعهما

ليكن  $ام ب$   $د م ه$  زاويتين مركبتين في محيطي دائرتين متساويتين  
فاذا فرض  $أ$  أولاً انه يوجد مقياس مشترك

بين القوسين  $ا ب$   $د ه$  بانه كان  
القوس  $ا ب$  مشتملاً عليه  $٧$  مرات

والقوس  $د ه$  مشتملاً عليه  $٤$  مرات فالنسبة بين القوسين  $ا ب$   $د ه$   
تكون  $\frac{٧}{٤}$

واذا وصلت مستقيمت من نقط تقاسيم القوسين الى مركزي المحيطين فان الزاوية  
 $ام ب$  تنقسم الى  $٧$  زوايا وهذه الزوايا تكون متساوية لان اقواسها متساوية  
ثم ان الزاوية  $د م ه$  تكون مشتملة على  $٤$  من هذه الزوايا فعلى ذلك تكون  
النسبة بين الزاويتين  $ام ب$   $د م ه$  هي  $\frac{٧}{٤}$  أيضاً

واذا فرض انه لا يوجد مقياس مشترك بين القوسين  $ا ب$   $د ه$  وانه

اذا قسم القوس  $د ه$  الى ثلاثة اقسام

متساوية وفرض ان القوس  $ا ب$

مشتمل على اربعة من هذه الاقسام وعلى

باقي اصغر من كل منها مثل  $ك ب$



فان نسبة القوس  $ا ب$  الى القوس  $د ه$  تكون اكبر من  $\frac{٧}{٤}$

واصغر من  $\frac{٧}{٤}$

لكن اذا وصلت مستقيمت من المراكز  $م و$  الى نقط تقسيم القوسين

فإن الزاوية  $\delta$  وهو تنقسم الى ثلاثة أقسام متساوية وأما الزاوية  $\alpha$  م ب  
 فتصير مشتملة على أربعة من هذه الأقسام مضافا اليهما باق  $\kappa$  م ب أصغر  
 من كل منهما وعلى ذلك تكون النسبة بين الزاويتين محصورة بين  $\frac{\delta}{\alpha}$  و  $\frac{\kappa}{\alpha}$   
 أيضا فإذا كان كل من النسبتين  $\alpha$  م ب :  $\delta$  م ر ا ب :  $\delta$  م ر محصورة  
 بين  $\frac{\delta}{\alpha}$  و  $\frac{\kappa}{\alpha}$  لكن إذا قسم القوس  $\delta$  م الى ١٠ أو الى ١٠٠ أو الى ١٠٠٠  
 أو ..... بحج من الأقسام المتساوية فإنه يبرهن بمثل ما ذكر على أن النسبتين  
 المتقدمتين الذكر تكونان محصورتين بين عددتين متعاقبتين من  
 الاعشار أو من الاجزاء من مائة أو ..... بحج فحينئذ تكون هاتان النسبتان  
 متساويتين لأنه قد ثبت انهما محصورتان بين عددتين يمكن صغر فرقهما على  
 قدر ما يراد

## في قياس الزوايا

قياس أى مقدار هو إيجاد نسبته الى الوحدة التي من نوعه وعلى ذلك إذا جعلت  
 الزاوية القائمة وحدة للزوايا فإن قياس أى زاوية يكون هو النسبة الكائنة  
 بين هذه الزاوية والزاوية القائمة

لكنه قد شوهد من النظرية السابقة أنه يمكن استعاضة نسبة الزاويتين  
 المركزيتين بنسبة القوسين المحصورين بين اضلاعهما فعلى هذا مقارنة أى  
 زاوية بالزاوية القائمة يمكن استعاضة بمقارنته قوس هذه الزاوية بربع  
 المحيط وفي هذا المعنى يقال على سبيل الاختصار ان الزاوية المركزية تقاس

بالقوس المحصور بين ضلعيها

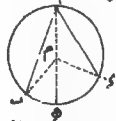
ولسهولة المقارنة المذكورة يقسم محيط الدائرة الى ٣٦٠ من الاجزاء المتساوية وهذه الاجزاء تسمى درجات وكل درجة تقسم الى ٦٠ دقيقة وكل دقيقة الى ٦٠ ثانية وهكذا

فإذا كان القوس المحصور بين ضلعي زاوية مركزية يحتمل على ٤٤ درجة فإن قياس هذه الزاوية يكون  $\frac{44}{360}$  أى  $\frac{11}{90}$

(تنبيه) النسبة بين أى قطعتين مأخوذتين في دائرتين متساويتين كالنسبة بين القوسين المحصورين بين اضلاعهما وبرهان ذلك مطابق لبرهان النظرية المتقدمه

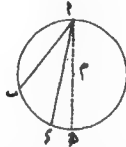
## القضية التاسعة عشر نظريه

أى زاوية محيطية مثل ب ا د ثماس نصف القوس ب د المحصور بين ضلعيها  
لتفرض أولاً أن مركز الدائرة موجود بين  
ضلعي الزاوية ب ا د فاذا مد القطر ا ه  
والضلع ا ق طرين م ب م د فأن الزاوية  
ب م د الخارجة عن المثلث ب م د تكون مساوية لجميع زاويتي الداخلتين  
م ا ب م ا د (قضية ٤٩ مقال ١) لكن حيث ان المثلث ب ا م متساوى  
الساقين فإن الزاوية م ا ب = م ا د وعلى ذلك تكون الزاوية ب م د ه



ضعف الزاوية  $\alpha$  م وحيث ان الزاوية  $\beta$  م ه مركبة فانها تقاس  
 بالقوس  $\beta$  ه ومن ذا يعلم ان الزاوية  $\alpha$  م تقاس بنصف القوس  
 $\beta$  ه وبمثل هذا الدليل يرى ان الزاوية  $\alpha$  م تقاس بنصف القوس  
 $\delta$  ه فعلى ذلك  $\alpha$  م +  $\alpha$  م أى  $\alpha$  م تقاس بنصف  $\beta$  ه +  $\delta$  ه  
 أى بنصف  $\beta$  ه

ثانياً لنفرض أن المركز م موجود خارج الزاوية  $\alpha$  ه ولنصل حينئذ  
 القطر  $\alpha$  ه فالزاوية  $\beta$  ه تقاس  
 بنصف القوس  $\beta$  ه والزاوية  $\gamma$  ه تقاس  
 بنصف القوس  $\delta$  ه فالفرق بين  
 هاتين الزاويتين وهو الزاوية  $\alpha$  ه



يقاس بنصف القوس  $\beta$  ه مطروح منه نصف القوس  $\delta$  ه أى تقاس بنصف  $\beta$  ه  
 وما ذكر يعلم ان كل زاوية محيطية تقاس بنصف القوس المحصور بين ضلعيها  
 (نتيجة ١) الزوايا المرسومة في قطعة واحدة كالزاويتين  $\alpha$  ه ،  $\beta$  ه

كلها متساوية لان كل منهما يقاس بنصف قوس



واحد  $\beta$  ه

(نتيجة ٢) كل زاوية مرسومة في نصف المحيط  
 تكون قائمة لانها تقاس بنصف نصف المحيط أى بربع المحيط

(نتيجة ٣) كل زاوية مرسومة في قطعة أكبر من نصف الدائرة كالزاوية  
 $\alpha$  ه تكون حادة لانها تقاس بنصف القوس  $\beta$  ه الأقل من نصف المحيط



(٦١)

وكل زاوية مرسومة في قطعة أصغر من نصف الدائرة كالزاوية  $\angle \text{هـ ب هـ}$  تكون منفرجة لانها تقاس بنصف القوس  $\text{ب ا د}$  الأكبر من نصف المحيط

## القضية العشرون نظريه

الزاوية  $\text{ب ا د}$  المشكلة من تماس ووتر تقاس بنصف القوس  $\text{ام د}$  المحصور بين ضلعها

لانه اذا مآ القطر  $\text{ا د}$  من نقطة التقاس  $\text{ا}$  قال زاوية  $\text{ب ا د}$  تكون قائمة (قضية ٩) وتقاس حينئذ بنصف نصف المحيط  $\text{ام د}$  وقد علم عامر ان الزاوية  $\text{ب ا د}$  تقاس بنصف القوس  $\text{د هـ}$  فعلى ذلك  $\text{ب ا د} + \text{د ا هـ}$  أى  $\text{ب ا هـ}$  تقاس بنصف القوس  $\text{ام د}$  مضافا عليه نصف القوس  $\text{د هـ}$  أى تقاس بنصف القوس الكلى  $\text{ام د هـ}$

وبمثل هذا يبرهن على ان الزاوية  $\text{د ا هـ}$  تقاس بنصف القوس  $\text{ا د}$  المحصور بين ضلعها

## القضية الحادية والعشرون نظريه

الزاوية  $\text{ب ا د}$  التى رأسها داخل المحيط المشكلة من القاطعتين  $\text{ب هـ د هـ}$  تقاس بنصف القوس المحصور بين ضلعها مضافا اليه نصف القوس المحصور

بين امتداد ضلعها



وذلك لأن الزاوية  $\alpha$  تساوي مجموع الزاويتين  $\beta$  و  $\gamma$

$\alpha > \beta$  ،  $\alpha > \gamma$  ، إذ هي خارجة عن المثلث  $\alpha$  و  $\beta$

وإن الزاوية الأولى تقاس بنصف القوس  $\alpha$  و

والثانية بنصف القوس  $\beta$  و  $\gamma$

## القضية الثانية والعشرون

نظريه

الزاوية  $\alpha$  التي رأسها خارجة عن المحيط للمثلث من المقاطعين  $\alpha$  و  $\beta$  ،

تقاس بنصف القوس المقعر  $\alpha$  مطروحا منه نصف القوس المقعر  $\beta$  و

وذلك لأن الزاوية  $\alpha$  تساوي فرق الزاويتين  $\beta$  و  $\gamma$

و  $\alpha > \gamma$  ، وأن الأولى من هاتين الزاويتين تقاس



بنصف القوس  $\alpha$  و الثانية تقاس بنصف القوس  $\beta$  و

وهذه القضية تكون صحيحة أيضا إذا كان أحد ضلعي الزاوية أو ضلعاها معا

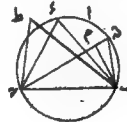
مماسين للمحيط ويستدل على ذلك بالبرهان المتقدم عليه

(نتيجة) القوس  $\alpha$  هو المحل الهندسي لرؤس الزوايا التي كل منها يساوي الزاوية

$\alpha$  و  $\beta$  و ضلعا كل منها يمران بالنقطتين  $\alpha$  و  $\beta$

وذلك لثلاثة أمور الأولى أن كل زاوية مرسومة

في القطعة  $\alpha$  و  $\beta$  تساوي  $\alpha$  و  $\beta$  والثاني أن كل



زاوية رأسها داخل القطعة مثل  $\angle م ب ا$  أكبر من  $\angle م ب د$  لأنه إذا مدد  $م د$   
على استقامته حتى قابل المحيط في  $هـ$  ووصل  $د ب$  كانت الزاوية  $\angle م ب د$   
الخارجية عن المثلث  $م ب د$  أكبر من الزاوية الداخلة  $\angle م ب هـ$  لكن  
الزاوية  $\angle م ب د = \angle م ب هـ$  فعلى ذلك يحدث  
 $\angle م ب د < \angle م ب هـ$

والثالث أنه يشاهد بمثل ما تقدم أن كل زاوية رأسها خارجة عن القطعة  
كالزاوية  $\angle م ب د$  تكون أصغر من الزاوية  $\angle م ب هـ$

## الفصل الثاني والعشرون

### نظريه

كل زاويتين متقابلتين من أى شكل رباعي  $ا ب د هـ$  مرسوم في دائرة  
تكونان مكملتين لبعضهما

ولذلك لأن الزاويتين المتقابلتين  $ا د هـ$  و  $ب ا د$

تقاسان معاً بنصف المحيط  $ا ب د هـ$

وبالعكس إذا كان في الشكل الرباعي زاويتان  $ا د هـ$



مكملتان لبعضهما كان هذا الشكل يمكن رسمه في الدائرة

برهانه أنه يمحيط دائرة بالنقط الثلاث  $ا د هـ$  فالزاوية  $ا د هـ$

تقاس حينئذ بنصف القوس  $ا م د$  وعلى ذلك فالزاوية  $ا ب د$  المكمل لها

تقاس بنصف القوس  $ا د هـ$  الباقى أى تكون مساوية لكل من الزاويتان

المرسومة في القطعة ا م د ومن البديهي ان هذا لا يثنأى الا اذا كانت النقطة  
ب على القوس ا م د

( في المسائل المتعلقة بالمقالة الاولى والثانية )

### المسئلة الاولى

المطلوب تقسيم المستقيم المعلوم ا ب الى قسمين متساويين  
لذلك نجعل النقطتان ا ر ب مركزين ويرسم قوسا دائريين بنصف قطر  
اكبر من نصف ا ب فهذان القوسا يتقاطعا على نقطة  
د تكون مساوية البعد عن النقطتين ا ب ثم يجرى  
بالطريقة عينها فوق الخط ا ب أو تحته نقطة ثابتة هـ  
تكون مساوية البعد عن ا ب فاذا وصل المستقيم د هـ فانه يقطع ا ب  
على جزئين متساويين في النقطة د

وذلك لانه من حيث ان كلا من النقطتين د هـ مساوية البعد عن  
النهايتين ا ب فانه يجب وجودهما معا على العمود المقام على ا ب من منتصفه  
وحيث انه لا يمكن ان يوصل بين نقطتين معلومتين الاستقيم واحد فالخط  
د هـ يكون هو العمود المذكور نفسه أى الذى يقسم الخط ا ب الى جزئين متساويين  
في النقطة د

### المسئلة الثانية

المعلوم نقطة مثل ا على مستقيم مثل ب د والمطلوب اقامة عمود على هذا المستقيم  
احد الجيب

من النقطة المذكورة



لذلك نؤخذ نقطتان مثل  $س$  و  $د$  على بعدين  
متساويين من النقطة  $ا$  ثم نجعل النقطتان  $س$  و  $د$   
مركزين وبرسم قوسا دائريين بنصف قطر أكبر من  
 $س$  ا هذان القوسان يتقاطعان في نقطة  $ز$  اذا وصل بينهما وبين  $ا$   
بالمستقيم  $ز$  ا كان هذا المستقيم هو العمود المطلوب  
(لأنه) العمل المذكور يستعمل في تشكيل زاوية قائمة  $س$  ا  $ز$  في النقطة المفروضة  
على المستقيم المعلوم  $س$  د

### المسألة الثالثة

المعلوم نقطة مثل  $ا$  خارجة على المستقيم  $س$  د والمطلوب تنزيل عمود على هذا  
المستقيم من النقطة المذكورة



لذلك نجعل النقطة  $ا$  مركزا وبرسم قوس دائرة  
بنصف قطر يكون أكبره كافيا لكون القوس يقطع  
 $س$  د في نقطتين مثل  $س$  و  $د$  وبعد ذلك نعين  
نقطة مثل  $ه$  تكون متساوية البعد عن  $س$  و  $د$  فاذا وصل المستقيم  $ا$  ه  
كان هو العمود المطلوب

لان كلا من النقطتين  $ا$  و  $ه$  متساوية البعد عن النقطتين  $س$  و  $د$  وبذا  
يكون  $ا$  ه عمودا على  $س$  د في منتصفه

## المسألة الرابعة

المعلوم زاوية مثل ك والمطلوب تشكيّل زاوية مساوية لها في النقطة ا  
المفروضة على المستقيم ا ب

لذلك نجعل النقطة ك مركزاً ون نصف قطر

حيثما اتفق يرسم القوس ل في المنتهى بصلبي

الزاوية ثم نجعل النقطة ا مركزاً ون نصف قطر

ا ب = ك ل يرسم قوس ب وغير محدود وبعد ذلك يؤخذ نصف قطر

يساوي الوتر ل في وتجعل النقطة ب مركزاً ويرسم ب نصف القطر المذكور

قوس دائرة يقطع القوس الغير محدود ب و في و فاذا وصل المستقيم ا ب كانت

الزاوية ا ب مساوية للزاوية المعلومّة ك

لان نصف قطري القوسين ب و ل في متساويان وكذا وترهما فيكونا

متساويين (نظيره ومقاله) ومن ذلك تكون الزاويتان ب و في كل متساويتين

## المسألة الخامسة

المطلوب تقسيم زاوية معلومة أو قوس معلوم الى قسمين متساويين

أولاً اذا لزم الامر لتقسيم القوس ا ب الى قسمين

متساويين نجعل المقتطعا ا ب مركزين ون نصف

قطر واحد يرسم قوسان يتقاطعان في د و ع

المستقيم د و ع يمين و والمركز د والمركز ع هذا المستقيم يقطع القوس ا ب على



قسمين متساويين في النقطة هـ

وذلك لأن كلا من النقطتين > و مساوية البعد عن النقطتين ا و ب  
اللتين هما هاتيا الوتر ا ب فعلى ذلك يكون الخط > عموداً على الوتر في منتصفه  
فيقسم القوس ا ب الى قسمين متساويين في النقطة هـ

ثانياً اذا اُمر بقسم الزاوية ا ب الى قسمين متساويين يبدأ برسم القوس  
ا ب يجعل الرأس هـ مركزاً ويجرى باقي العمل كما سبق ذكره فن الواضع الخط > و  
يقسم الزاوية ا ب الى قسمين متساويين

( تنبيه ) باجراء العمل عينه يمكن تقسيم كل من الضلعين ا هـ و ب الى قسمين  
متساويين وكذا كل من الاجزاء الجادثة وبذا نقسم الزاوية المعروفة أو القوس  
المعلوم الى اربعة اقسام متساوية ثم الى ثمانية اقسام متساوية ثم الى ستة  
عشر من الاجزاء المتساوية وهكذا

## المسئلة السادسة

المطلوب مد مستقيم موازى مستقيماً معلوماً > من نقطة مفروضة ا

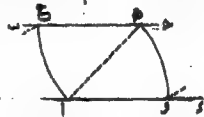
لذلك يؤخذ نصف قطر كبير بالكفاية وتجعل

النقطة ا مركزاً ويرسم القوس الغير محدود

و ثم يجعل النقطة هـ مركزاً وينصف القطر عينه

يرسم القوس اح و يؤخذ هـ و = اح و يمد ا و فيكون هذا المستقيم هو

الموازى للمطلوب



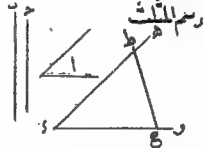




## المسألة الثامنة

المعلوم ضلعان  $ب د$  عن مثلث وكذا الزاوية  $ا$  المحصورة بينهما والمطلوب

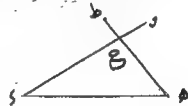
لذلك يرسم مستقيم غير محدود مثل  $د و$   
ويرسم في النقطة  $د$  زاوية  $هـ$  وتساوي  
الزاوية المعلومه  $ا$  وبعد ذلك يؤخذ  
 $د ط = ب$  ،  $د و = د$  ويوصل  $ط و$  فالمثلث  $د و ط$  يكون هو  
المثلث المطلوب



## المسألة التاسعة

المعلوم من مثلث ضلع وزاويتان والمطلوب رسم المثلث  
فالزاويتان المعلومتان اما ان تكونا مجاورتين للضلع المعلوم واما ان تكون  
احدهما مجاورة لهذا الضلع والاخرى مقابلة له ففي هذه الحالة يبحث عن الزاوية  
الثالثة كما في المسئلة للمتقدمة وبذا نعلم الزاويتان  
المجاورتان للضلع المعلوم فاذا اقرر ذلك يمد

مستقيم  $د هـ$  يساوي الضلع المعلوم وترسم زاوية  
في النقطة  $د$  تساوي احدى الزاويتين المجاورتين  
ويرسم في النقطة  $هـ$  زاوية  $د هـ ط$  تساوي الزاوية المجاورة الاخرى فان الخطان  
 $د و$  ،  $د هـ ط$  يتقاطعان في  $ج$  فالمثلث  $د هـ ج$  يكون هو المثلث المطلوب



## المسألة العاشرة

المعلوم من مثلث أضلاعه الثلاثة  $a, b, c$  والمطلوب رسم هذا المثلث

لذلك يمد مستقيم  $o$  يساوي الضلع  $a$  وتجعل النقطة  $h$  مركزاً ويرسم قوس دائرة بنصف قطر يساوي الضلع الثاني  $b$  ثم تجعل النقطة  $k$  مركزاً ويرسم قوساً آخر بنصف قطر يساوي الضلع الثالث  $c$  وهذا القوس يقطع القوس الأول في النقطة  $و$  فإذا وصل المستقيمان  $o, و$  فإن المثلث  $o, و, h$  يكون هو المثلث المطلوب

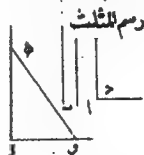


ولاحظ أن تكون المسألة ممكنة الحل يلزم تقاطع المقيطين للرسمين بجعل التقطعتين  $o, و$  مركزين وهذا يدعى (قضيه ١٦ مقالة ٤) أن يكون الضلع  $o, و$  أصغر من مجموع الضلعين الآخرين وأكبر من فرقهما

## المسألة الحادية عشر

المعلوم من مثلث ضلعان  $a, b$  والزاوية  $o$  المقابلة للضلع  $b$  والمطلوب

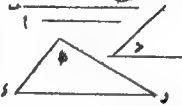
لذلك تعتبر حالتان (الحالة الأولى) إذا كانت الزاوية  $o$  قائمة أو منفرجة يرسم زاوية  $h, و$  تساوي الزاوية  $o$  ويجعل النقطة  $h$  مركزاً ويرسم قوس دائرة بنصف قطر



يساوى الضلع المعلوم ب فهذا القوس يقطع د و فاذ اوصل ه و  
يكون د ه و هو المثلث المطلوب

وفي هذه الحالة يلزم ان يكون الضلع ب اكبر من ا لانه لما كانت الزاوية >  
قائمة أو منفرجة فانها تكون اكبر زوايا المثلث واذن يجب ان يكون الضلع المقابل  
لها اكبر الاضلاع

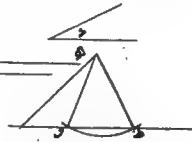
(الحالة الثانية) اذا كانت الزاوية >  
حادية وكان الضلع ب < ا فان العمل  
عنه يكون صحيحا والمثلث د ه و



يكون هو المثلث المطلوب

واما اذا كانت الزاوية > حادة والضلع ب > ا فان القوس الذي مركزه ه  
ونصف قطره د ه و ب يقطع الضلع د و في نقطتين د و ط موجودتين  
في جهة واحدة من د وعلى ذلك يوجد  
مثلثان د ه و د ه ط كل منهما يلحق

بحل المسئلة  
(تنبيه) اذا كان الضلع ب اصغر من  
العدد المنزول من ه على الخط د و فان المسئلة تكون غير ممكنة الحل في  
جميع الحالات

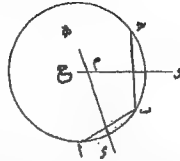


### المسئلة الثانية عشر

المطلوب ايجاد مركز دائرة معلومة أو قوس دائرة معلوم

(٧٤)

لذلك يؤخذ على محيط الدائرة أو على  
القوس ثلاث فقط بالاختيار مثل  
ا ب ز د ويوصل أو يتصور وصل  
الخطين ا ب ر د و يقسم كل من

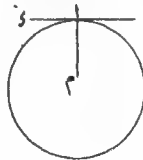


هذين المستقيمين إلى قسمين متساويين بالعمودين د ه ر وج فالنقطة م  
التي يتقابل فيها هذان العمودان تكون هي المركز المبحوث عنه  
(تنبيه) يستعمل العمل المذكور في رسم محيط دائرة يمر بثلاث نقط معلومة  
ا ب ز د ويستعمل أيضاً في رسم محيط دائرة على مثلث معلوم ا ب د

### المسئلة الثالثة عشر

المطلوب مد محاس للدائرة معلومة من نقطة معلومة

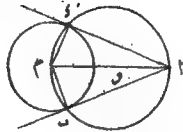
إذا كانت النقطة ا موجودة على  
محيط الدائرة يوصل النصف قطر  
م ا ويقام العمود ا د على ا م  
فهذا العمود يكون هو المحاس المطلوب  
(فضيه ٩ مقاله <)



وأما إذا كانت النقطة ا خارجة عن الدائرة فإنه يمد المستقيم م ا بين  
المركز والنقطة ا ويقسم م ا إلى قسمين متساويين بالنقطة و  
١٨ م هكذا أحد نجيب

(٧٣)

وتجعل النقطة  $و$  مركزاً ويرسم محيط دائرة  
بنصف القطر  $وم$  فهذا المحيط يقطع المحيط  
المعلوم في النقطة  $ب$  فاذا وصل  $ا ب$  كان



هو المماس المبحوث عنه

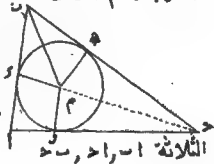
لانه اذا وصل  $م ب$  فأن الزاوية  $م ب ا$  تكون قائمة بما انها مرسومة في  
نصف المحيط (قضية ١٩ مقاله ٤) وعلى ذلك يكون  $ا ب$  عموداً على النصف  
قطر  $م ب$  في نهايته وبذا يكون مماساً

لكنه اذا كانت النقطة  $ا$  خارجة عن الدائرة يشاهد انه يوجد دائماً  
مماسان  $ا ب$ ،  $ا د$  يمران بالنقطة  $ا$  وهذان المماسان يكونان  
متساويين لان المثلثين  $م ب ا$ ،  $م د ا$  القائمي الزاوية مشتركان في الرأس  
 $م ا$  والضلع  $م ب = م د$  وبذا يكونان متساويين (قضية ١٨ مقاله ١)  
ومن تساويهما يكون  $ا ب = ا د$  وايضاً تكون الزاوية  $م ا ب = م ا د$

### المسألة الرابعة عشر

المطلوب رسم دائرة في مثلث معلوم  $ا ب د$

لذلك يمد المستقيمان  $ا م$ ،  $ب م$  المنصفان  
للزاويتين  $ا ب د$  فهذان المنصفان يتقاطعان  
في نقطة  $م$  تكون متساوية البعد عن الاضلاع



الثلاثة  $ا ب د$ ،  $ا د ب$ ،  $ب د ا$

وعلى ذلك اذا انزل من هذه النقطة الاعمدة م و ر م ه على اضلاع  
المثلث فان هذه الاعمدة تكون متساوية ومحيط الدائرة المرسوم من المركز م  
بنصف القطر م و يكون مماساً للاضلاع الثلاثة

(تنبيه ١) من حيث ان النقطة م متساوية البعد عن الضلعين ب و د ا ح  
فانها توجد على منتصف الزاوية د ومن ذلك يعلم ان الثلاثة مستقيمات  
المنصفة لزوايا أى مثلث تقاطع جميعها في نقطة واحدة

(تنبيه ٢) اذا اردت منصف الزاويتين الخارجيتين لـ ب و د م ه فان  
نقطة تقاطعهما هي م تكون مركز الدائرة  
محاسة للضلع ب د ولا امتداد للضلعين  
الاخرين وبمثل هذا يوجد مركزان م و م'  
للدائرتين اخرتين كل منهما محاسة للضلع من الاضلاع المثلث ولا امتداد  
الضلعين الاخرين



فعلى هذا يوجد على وجه العموم اربع دوائر محاسة لثلاث مستقيمات معلومة

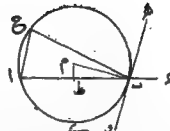
### المسئلة الخامسة عشر

المعلوم مستقيم مثل ا ب والمطلوب رسم قطعة دائرة عليه تقبل زاوية  
معلومة د اى قطعة دائرة كل زاوية رسمت فيها تكون متساوية  
للزاوية د

لذلك يمد ا ب من جهة د ويرسم من النقطة ب زاوية ب د ه = د

(٧٥)

ويقام العمود  $م$  على  $د$  والعمود  $ط$  على منتصف  $اب$  وتجعل نقطة التقابل  $م$  مركزاً ويرسم محيط دائرة بنصف القطر  $م$ .



فالمقطعة  $اج$   $ب$  تكون هي المقطعة المطلوبة

لأنه من حيث أن  $م$  و  $د$  عموداً على النصف قطر  $م$  في نهايته فإن  $ب$  و  $د$  يكونان مماساً والزاوية  $اب$  و  $نقاس$  بنصف القوس  $اك$   $ب$  د قضيعة  $ب$  مقالة  $د$  ومع ذلك فإن الزاوية المحيطية  $اج$   $ب$  تقاس بنصف القوس  $اك$   $ب$  ايضاً فمن ذلك تكون الزاوية  $اج$   $ب$   $ار$  و  $د$   $ب$   $د$  وعلى هذا تكون كل زاوية مرسومة في النقطة  $اج$   $ب$  مساوية للزاوية المعلومة  $د$

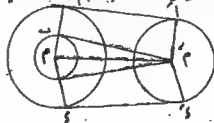
(تنبيه) اذا كانت الزاوية المعلومة قائمة فإن القطعة المبحث عنها تكون عبارة عن نصف الدائرة المرسومة على القطر  $اب$

## المسألة السادسة عشر

المطلوب رسم مماس لمحيطي دائرتين

او لا يفرض ان المسألة محلولة وليكن  $ا$   $ا$  مماساً خارجياً لمحيطي الدائرتين

فاذا امدد النصف قطر  $م$   $ا$   $م$  الوصلان لنقطتي التماس ومد المستقيم  $م$   $د$  الموازي للمماس  $ا$   $ا$  فإن النصف

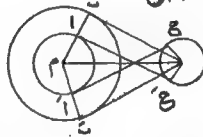


قطرين ١٢، ١٣ يكونان عمودين على المستقيم م ب لكونهما عمودين على موازية ا ب فعلى ذلك يكون م ب مماساً للمحيط دائرة مركزه م ونصف قطره م ب = ١٣ - ١٢

ومن هنا يستخرج العمل الآتي وهو ان يرسم محيط دائرة مركزه م بنصف قطر يساري ١٣ - م ١٢ ويمد من النقطة م مماساً لهذا المحيط ومتى علت النقطة ب يمد المحط م ب ويمد م ١٢ يوازي م ١٣ ويوصل ا ب ومن هذا العمل يشاهد ان المسئلة تقبل حلين لانه يمكن مد مماسين للمحيط م ب من النقطة م ويشاهد أيضاً ان المسئلة لا يمكن مكنة للحل الا اذا كان م ب  $\leq$  ١٣ - م ١٢ أي الا اذا كان للمحيطان غير متباعديل في الداخل

ثانياً لنعرض لمد مماس داخل لمحيطي الدائرتين اللذين نصفاهما

١٢، ١٣



ولذا نفرض ان ا ب هو المماس المطلوب فاذا مد النصفا قطرين ١٢، ١٣ الواصلين لنقطتي القاس ومد المستقيم م ب الذي يوازي

ا ب فان المستقيم م ب يكون عموداً على النصفا قطرين ١٢، ١٣ لان موازية ا ب عمود عليهما وعلى ذلك يكون م ب مماساً للمحيط دائرة مركزه م ونصف قطره م ب = ١٣ + ١٢ = ٢٥

محمد نجيب

هـ م ١٩

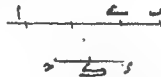


ومن حينئذ لأجل حل المسئلة يرسم محيط دائرة من المركز م بنصف قطر يساوى  
مجموع نصفى قطرى المحيطين للعلومين ويمد من النقطة م مماس م ب  
لهذا المحيط ويبقى العمل يجرى نحوه كما سبق بيانه فى الحالة المتقدمه  
ولهذه المسئلة حلان أيضاً ولا تكون ممكنة الا اذا كان  $m \leq m + 1$  أى  
الاذا كان المحيطان متساويين أو متساوين فى الخارج

### المسئلة السابعة عشر

المطلوب إيجاد اعظم مقياس مشترك بين خطين مستقيمين مثل ا ب د و إيجاد  
النسبة العددية الكائنة بين هذين الخطين

لذلك يقال ان اعظم مقياس مشترك بين خطين  
لا يتجاوز أصغرهما د و لكنه يكون مساوياً د و  
اذا كان أكبر لخطين وهو ا ب محتوياً على د مراراً  
صحيفة بالضبط



وعلى ذلك اذا طبق د على ا ب وفرض ان  $ا ب = د و + د$  ب  
فان اعظم مقياس مشترك بين الخطين ا ب د و يكون مساوياً لاعظم  
مقياس مشترك بين الخطين د و ب  
لانه من حيث أن كل مقياس مشترك بين ا ب د و يقسم د و فانه يقسم  
ا ب أيضاً ومن حيث انه يقسم ا ب فان الباقي ب د يكون محتوياً عليه مراراً  
صحيفة بالضبط وحينئذ فهو مقياس مشترك بين د و ب

وبالعكس كل مقياس مشترك بين  $\alpha$  و  $\beta$  يدخل في كل من  $\alpha$  و  $\beta$  ،  
 عملاً صحيحاً بالضبط ، وبناء عليه يدخل كذلك في  $\alpha \beta$  ، وخيئاً فهو مقياس  
 مشترك بين  $\alpha \beta$  و  $\gamma$  .

فعلى ما ذكره جميع المقاييس المشتركة بين  $\alpha \beta$  و  $\gamma$  هي المقاييس المشتركة بين  $\alpha \beta \gamma$  ،  
 و  $\beta$  بعينها ، وإذا كان يكون أعظم مقياس مشترك بين الخطين الأولين هو  
 أعظم مقياس مشترك بين الخطين الآخرين .

وإذا نقل  $\beta$  على  $\alpha$  و  $\gamma$  وفرض أن  $\alpha \beta \gamma = \delta$  ، فإنه يبرهن  
 مثلاً ما تقدم على أن أعظم مقياس مشترك بين  $\alpha \beta$  و  $\gamma$  ، و  $\delta$  هو أعظم مقياس  
 مشترك بين  $\beta$  و  $\delta$  .

وأيضاً إذا نقل  $\delta$  على  $\alpha$  وفرض أن  $\alpha \delta = \epsilon$  ، فإنه  
 يكون هو أعظم مقياس مشترك بين الخطين  $\alpha \delta$  ، و  $\gamma$  ،  
 ومع ذلك فإنه ينتج من التساويات السابقة ما هوأت

$$\alpha \beta \gamma = \delta \quad \text{و}$$

$$\alpha \delta = \epsilon \quad \text{و}$$

وإذا كان يكون نسبة الخطين  $\alpha \beta$  و  $\gamma$  هي  $\frac{\alpha}{\beta}$

(تنبيه) قد فرضنا فيما سبق أنه صار الوصول في هذا العمل السلسل على  
 باقي مسأله للصفر ولنبرهن على أن الأمر يكون كذلك دائماً متى كانت الخطين مقياس  
 مشترك ، وعلى أنه في الحالة التي لا يكون للخطين فيها مقياس مشترك يتوصل



وفي الحالة التي لا يكون فيها الخطان مقياس مشترك يمكن من بعد اجراء عملية  
عمليات حذف الباقي الاخير وحيشد يسعمل الباقي السابق للاخير مقياساً مشتركاً  
رابطاً الى مقدار تقريبي للنسبة

### المسئلة الثامنة عشر

المعلوم زاويتان مثل  $\alpha$  و  $\beta$  والمطلوب إيجاد المقياس المشترك بينهما ان كان  
بينهما مقياس مشترك وتعيين نسبتها العددية من بعد إيجادها

لذلك يرسم قوسات  $\alpha$  و  $\beta$  و ينصفى قطريين  
متساويين لاجل استعمالهما في قياس



هاتين الزاويتين ثم يجري العمل في مقارنة  
القوسين  $\alpha$  و  $\beta$  وحسب المسئلة المتقدمة اذا لا قواس التي انصافاً قطارها

متساوية يمكن تطبيقها على بعضها مثل الخطوط المستقيمة وبهذا يتوصل الى  
المقياس المشترك بين القوسين  $\alpha$  و  $\beta$  وان كان بينهما مقياس مشترك وبه

يتحصل على نسبتها العددية فهذه النسبة تكون متساوية لنسبة الزاويتين  
المفروضتين (٨١ مقاله  $\alpha$ ) واذ افترض ان  $\alpha$  و  $\beta$  هو المقياس المشترك بين

القوسين فان  $\alpha$  و  $\beta$  تكون هي المقياس المشترك بين الزاويتين  
وان لم يوجد بين القوسين مقياس مشترك فلا يوجد للزاويتين مقياس مشترك

ولا يتوصل الا الى مقدار تقريبي ل نسبتها

## المقالة الثالثة في مساحة المضلع وفي التشابه

### تعريف

(١) مساحة شكل ما هي نسبة امتداده الى امتداد وحدة السطح (مساحة الشكل وسطحه بمعنى واحد).

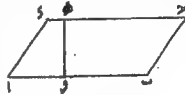
(٢) الشكلان المتكافئان هما شكلان مساحتهما واحدة وقد يمكن تكافؤ الشكلين وان كانا مختلفي الهيئة مثلاً يمكن ان تكافئ الدائرة مربعاً والمثلث مستطيلاً وهكذا

واسم الشكلين المساويين يختص بالشكلين اللذين اذا طبق احدهما على الاخر اتحدا في جميع نقطهما وذلك كاللداثرتين اللتين نصف قطرهما متساويين وكالمثلثين اللذين اضلاعهما المتناظرة متساوية وهكذا

(٣) ارتفاع متوازي الاضلاع هو العمود

الدال على بعد ضلعين متقابلين مثل ا ب

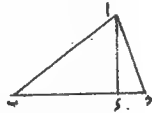
ح د ممتحدين قاعدتين له



(٤) ارتفاع المثلث هو العمود الملتزم رأس

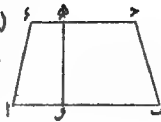
زاوية من زواياه مثل ا على الضلع المقابل لها

ح د الممتحذ قاعدة المثلث



(٨٤)

(٥) ارتفاع شبه المنحرف هو العمود  $هـ$  والمصورين  
ضلعيه المتوازيين  $ا ب$  ،  $ح د$  و



القضية الأولى  
نظريه

متوازي الاضلاع المتساويان في القاعدة والارتفاع يكونان متكافئين  
لكن  $ا ب$  القاعدة المشتركة بين متوازي الاضلاع  
 $ا ب ح د$  ،  $ا ب هـ د$  فمن حيث ان ارتفاعهما متساويان  
بالفرض فان القاعدتين العليتين وهما  $ح د$  ،  $هـ د$

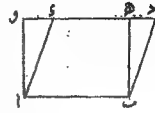


توجدان على مستقيم واحد يوازي  $ا ب$  لكن من خاصية متوازي الاضلاع يحدث  
 $ا د = ب ح$  ،  $ا و = ب هـ$  ومن الخاصية عينها يحدث  $ح د = ا ب$   
 $هـ د = ا ب$  فمن هذا يكون  $ح د = هـ د$  فاذا طرح  $ح د$  ،  $هـ د$  من  
 $هـ د$  كان الباقيان  $ح د$  ،  $هـ د$  متساويين

ومن هنا ينتج ان الاضلاع المتناظرة في المثلثين  $ا و ح د$  ،  $ا ب هـ د$  متساوية وبذا  
يكون هذان المثلثان متساويين لكن اذا طرح المثلث  $ا و ح د$  من رباعي الاضلاع  $ا ب هـ د$   
يبقى متوازي الاضلاع  $ا ب هـ د$  واذا طرح المثلث  $ح د هـ د$  من رباعي الاضلاع  $ا ب هـ د$   
عنه يبقى متوازي الاضلاع  $ا ب هـ د$  فعلى ذلك يكون متوازي الاضلاع  $ا ب هـ د$   
 $ا ب هـ د$  المتساويان في القاعدة والارتفاع متكافئين

( ١٨٣ )

(نتيجة) أي متوازي أضلاع مثل  $ا ب د ه$  يكون  
مكافئاً للمستطيل  $ا ب ه و$  المتحدد معه في القاعدة  
والارتفاع



### القضية الثانية نظريه

أي مثلث كالمثلث  $ا ب د$  يكون نصف متوازي الأضلاع  $ا ب د ه$  المتحد  
معه في القاعدة والارتفاع

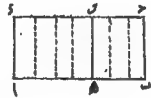
و لأن المثلثين  $ا ب د$  ,  $ا د ه$  متساويين  
(قضية ٣١ مقالة ١)



(نتيجة ١) المثلث  $ا ب د$  نصف المستطيل  $ا ب ه و$  المتحدد معه  
في القاعدة  $ا ب د$  والارتفاع  $ا ب ه و$  لأن المستطيل  $ا ب ه و$  يكافئ  
متوازي الأضلاع  $ا ب د ه$   
(نتيجة ٢) جميع المثلثات المتساوية في القاعدة والارتفاع متكافئة

### القضية الثالثة نظريه

نسبة المستطيلين المتحددين في الارتفاع كنسبة  
قاعدتيهما  
ليكن  $ا ب د ه$  ,  $ا ه و$  مستطيلين متحددين



في الارتفاع ١٠ فنسبتهما الى بعضهما كنسبة قاعدتيهما ١٠ ب ١١  
 لانه لو فرض في مبدأ الأمر انه يوجد مقياس مشترك بين القاعدتين ١٠ ب ١١  
 بان كانت نسبة هاتين القاعدتين كنسبة العددين ١٧ ٤٤ مثلاً ونقسم ١٠  
 سبعة أقسام متساوية فان ١١ يكون محتوياً على أربعة من هذه الأقسام ولذا  
 أقيم عمود على القاعدة في كل نقطة من نقاط التقسيم حدث بهذا سبع مستطيلات  
 جزئية كلها متساوية لان قواعدها وارتفاعاتها متساوية فالمستطيل  
 ١٠ ب ١١ يحتوي على سبع مستطيلات جزئية وأما المستطيل  
 ١١ ب ١٢ فإنه يحتوي على أربع منها وعلى ذلك تكون نسبة المستطيل  
 ١٠ ب ١١ الى المستطيل ١١ ب ١٢ كنسبة ٧ الى ٤ أى كنسبة ١٠ الى ١١  
 وانما يوجد مقياس مشترك بين القاعدتين ١٠ ب ١١ فإنه يبين  
 بان دليل الذي سبق استماله ( قضية ١٨ مقالة ) على ان القضية لم تنزل صحيحة

### القضية الرابعة نظريه

نسبة أي مستطيل الى اخر كنسبة حاصل ضرب قاعدة الاولى في ارتفاعه الى  
 حاصل ضرب قاعدة الثاني في ارتفاعه  
 ليكن م م سطحى المستطيلين د د م بعدى المستطيل الاول د م  
 بعدى المستطيل الثاني  
 ولنسمو مستطيلاً ثالثاً م م متوابع الاول في القاعدة د ومتوابع  
 ١١ م هـ



الثاني في الارتفاع  $\overline{r}$   
 فعل مقتضى النظرية المتقدمة يحدث

$$\frac{\overline{r}}{\overline{r}} = \frac{\overline{r}}{\overline{r}}$$

$$\frac{\overline{r}}{\overline{r}} = \frac{\overline{r}}{\overline{r}}$$

فاذا ضرب هذان للتساويان في بعضهما حصلنا  $\overline{r} \times \overline{r} = \overline{r} \times \overline{r}$  ثم قسم حد النسبة الاولى على  $\overline{r}$  يحدث

$$(1) \quad \frac{\overline{r} \times \overline{r}}{\overline{r} \times \overline{r}} = \frac{\overline{r}}{\overline{r}}$$

في قياس المستطيل

قياس مستطيل ما م معناه إيجاد نسبته الى مستطيل آخر م مأخوذ وحدة  
 فعل مقتضى النظرية المتقدمة يستحصل على هذه النسبة بالبحث عن عدد احتواء  
 الخطوط د، ر، ر، د،  $\overline{r}$  على وحدة واحدة وبقسمة حاصل ضرب العددين

الاولين على حاصل ضرب العددين الآخرين

$$\text{فاذا فرضنا د} = 6, \text{ ر} = 4, \text{ د} = 6, \text{ ر} = 4$$

$$\text{يحدث} \quad \frac{6 \times 4}{4 \times 6} = \frac{6}{6}$$

وعلى هذا يكون المستطيل م مختصراً على المستطيل المأخوذ وحدة 4 مرات

ووحدة السطوح المتخذة في العادة هي المربع الذي ضلعه وحدة الاطول

ومن حينئذ يؤخذ العددين الدالان على د، ر الى الوحدة ويميز النسب (١)

$$\text{هكذا} \quad \frac{6 \times 4}{4 \times 6} = \frac{6}{6}$$

ومن ذا يشاهد ان نسبة اى مستطيل الى المربع المتشاكل على وحدة الاطول تساوى

حاصل ضرب العددين الدالين على عدد احتواء القاعدة والارتفاع على الوحدة الخطية وهذا يعبر عنه على سبيل الاختصار بان يقال أن مساحة المستطيل تساوي حاصل ضرب قاعدته في ارتفاعه

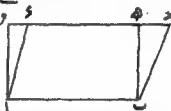
فإذا فرض أن  $د = ٥٣, ٣٠$  م،  $ر = ٢٤, ٤٥$  كان سطح المستطيل مساوياً  $١٢٩٤, ٤٥$  أمتار مربعة أى  $٥٠$  سنتيمتر مربع  $٩٤$  وسميتر مربع  $٧$  أمتار مربعة ويكتب على سبيل الرمز هكذا  $١٢٩٤, ٤٥$

### القضية الخامسة

#### نظريه

مساحة متوازي الاضلاع تساوي حاصل ضرب قاعدته في ارتفاعه

لأن متوازي الاضلاع  $ا ب د ه$  يكافئ المستطيل  $ا ب ه و$  المتحد معه في القاعدة  $ا ب$  وفي الارتفاع  $د ه$  وحيث أن مساحة هذا المستطيل تساوي



$ا ب د ه$  فيكون هذا الحاصل عينه مساوياً لمساحة متوازي الاضلاع  $ا ب د ه$  (نتيجة) النسبة بين متوازيي الاضلاع المتحددين في القاعدة كالنسبة بين ارتفاعيهما والنسبة بين متوازيي الاضلاع المتحددين في الارتفاع كالنسبة بين قاعدتيهما

لأنه إذا جعل  $د, ه, ر$  رموزاً لمقادير حيثما اتفقت يحدث على وجه العموم

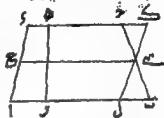
$$\frac{د}{ه} = \frac{ا ب د ه}{ا ب ه و} \quad \text{ما هو آت}$$

## القضية السادسة نظريه

مساحة اى مثلث تساوى حاصل ضرب قاعدته فى نصف ارتفاعه  
 لان المثلث ا ب د نصف متوازى الاضلاع ا ب د هـ  
 المتحد معه فى القاعدة ب د وفى الارتفاع ا د وحيث  
 ان سطح متوازى الاضلاع =  $a \times b$  (قضيه هـ)  
 فيكون سطح المثلث =  $\frac{1}{2} a \times b = \frac{1}{2} a \times b$   
 (نتيجه) النسبة بين المثلثين المتحدتين فى الارتفاع كالنسبة بين قاعدتيهما  
 والنسبة بين المثلثين المتحدتين فى القاعدة كالنسبة بين ارتفاعيهما

## القضية السابعة نظريه

مساحة تشبيه المخرف ا ب د ي تساوى حاصل ضرب ارتفاعه هـ وفى نصف مجموع  
 القاعدتين المتوازيين ا ب د و  
 برهانه ان نمد من النقطة هـ التى هى منتصف ح د  
 مستقيم ك ل يوازى الضلع ا د ونمد د ح حتى  
 يقابل ك ل  
 فالمثلثان هـ د ل و هـ د ك يكونان متساويين لان الضلع هـ د = هـ د  
 بالمثل والزوايا هـ د ل = هـ د ك والزوايا هـ د ل = هـ د ك



من متوازي  $د ك$  ، بل فعلى ذلك يكون شبه المخرف  $ا ب د و$  مكافئاً للمخرف  
الاضلاع  $ا د ك ل$  وبذا تكون مساحته هي  $ه و$   $ا د ك ل$

لكن  $ا ل = د ك$  ومن تساوى المثلثين  $ب د ل$  ،  $ك د و$  يكون الضلع  $ب ل = و ك$

فاذن يكون  $ا ب + د و = ا ل + د ك = ب د$  ومن ذا يشاهد أن  $ا ب$

نصف مجموع القاعدتين  $ا ب$  ،  $د و$  وحينئذ تكون مساحة شبه المخرف

$ا ب د و$  مساوية لحاصل ضرب الارتفاع  $ه و$  في نصف مجموع القاعدتين

$ا ب$  ،  $د و$  وهذا يعبر عنه هكذا  $ا ب د و = ه و$   $( ا ب + د و )$

(تبيه) اذا مد من النقطة  $ب$  الى  $د$  مستقيم  $ب د$  مستقيم  $ب د$  موازى

القاعدة  $ا ب$  فان النقطة  $ج$  تكون منتصف  $ا د$  . أيضاً لان الشكل

ا ب د ل متوازى الاضلاع وكذا الشكل  $د و ك ل$  لان الاضلاع

المتقابلة متوازية فعلى ذلك يكون  $ا ب = د ل$  ،  $د و = ل ك$

وبحيث أن  $ب ل = د و$  لتساوى المثلثين  $ب د ل$  ،  $د و ك$

فيكون  $ا ب = د و$

وحيث ان الخط  $ب د = ا ل = ا ب + د و$  فيمكن التعبير عن مساحة شبه

المخرف أيضاً بهذا الحاصل  $ه و$   $ا ب د و$  الذى يستدل منه على ان المساحة

المذكورة تساوى حاصل ضرب ارتفاع شبه المخرف في الخط الواصل بين منتهى

الضلعين الغير متوازيين

## القضية الثامنة نظريه

اذا قسم الخط  $ا د$  الى قسمين مثل  $ا ب$  ،  $ب د$  فان المربع المنشأ على الخط الكلي  
يحتوى على المربع المنشأ على احد الجزئين  $ا ب$  وعلى المربع المنشأ على الجزء الاخر  $ب د$  وعلى  
ضعف المستطيل المكون من الجزئين  $ا ب$  ،  $ا د$  وهذا يعبر عنه هكذا

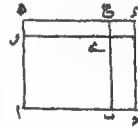
$$ا د^2 \text{ أو } (ا ب + ب د)^2 = ا ب^2 + ب د^2 + ٢ ا ب ب د$$

وذللناه لانه اذا انشأ المربع  $ا د ه ه$  ولخذ  $ا و = ا ب$

ومد وسط موازياً  $ا د$  ،  $ب ج$  موازياً  $ا ه$  فيقسم

المربع  $ا د ه ه$  الى اربعة اجزاء الاول  $ا ب ه و$

وهو المربع المنشأ على  $ا ب$  لانه قد أخذ  $ا و = ا ب$



والثاني  $ب ط و ج$  وهو المربع المنشأ على  $ب د$  لانه لما كان  $ا د = ا ه$  ،  $ا و = ا ب$

كان الفرق  $ا د - ا ب$  مساوياً للفرق  $ا ه - ا و$  ومن هذا يحدث  $ب د = ه و$

لكن بسبب التوازي يكون  $ب ط = د و$  ،  $ب و = ه و$  فعلى ذلك

يكون  $ب ج = ط و$  مساوياً للمربع المنشأ على  $ب د$  فاذا طرح هذان

المربعات من المربع الكلي يبقى المستطيلان  $ب د ط ه$  ،  $ه و ب ج$  المساوي

كل منهما  $ا ب ب د$  وبذا اثبت المطلوب

(تنبيه) اذا جعل  $د و$  رمزاً للعدد  $د$  والدين  $ا د$  على حرفي الخط  $ا د$  فان

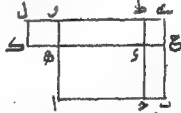
الضرب الجبرى ينتج منه المتساوية الآتية وهى  $(د + د)^2 = د^2 + د^2 + د د$

واذا فرض ان مساحة المستطيل معلومة فان هذه المتساوية يتحد عنها برهان ثانٍ  
للتظريه المذكوره ويجب الاتيان بمثل هذه المعرطه في حق النظريتين الاتيتين

### القضية التاسعة نظريه

اذا كان الخط  $ad$  هو الفرق بين الخطين  $ab$  و  $cd$  فان المربع المنشأ على  $ad$   
يحتوى على مربع  $ab$  وعلى مربع  $cd$  مطروحاً منها ضعف مستطيل الخطين  
 $ab$  و  $cd$  أى انه يحدث  $ad^2 = (ab - cd)(ab + cd) = ab^2 - cd^2$  أى  $ab^2 = cd^2 + ad^2$

برهانه ان ينشأ المربع  $ab$  و  $cd$  وان يثبت  $ad$   
=  $ad$  وان يمد  $cd$  موازياً لـ  $ab$  و  $cd$  موازياً  
لـ  $ab$  ثم يجرى تكميل المربع  $cd$  و  $ad$



فيذا يكون كل من المستطيلين  $cd$  و  $ad$  ط  $cd$  و  $ad$  مساوياً لـ  $ab$   
فاذا طرحا من الشكل الكلى  $ab$  لـ  $cd$  الذى مقداره  $ab + cd$  فن

الواضح انه يبقى المربع  $ad$  وبذا يثبت المطلوب

(تنبيه) هذه القضية تستنتج أيضاً من القانون الجبرى الاتى وهو

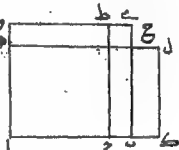
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

### القضية العاشرة نظريه

المستطيل المكون من مجموع وتفاضل خطين مثل  $ab$  و  $cd$  يساوى فرق مربعي هذين

الخطين بحيث يكون  $(ا + ب) \times (ب - ا) = آ - ب$   $\times$   $ب - ا$   
 وبهذه ان يرسم المربعات  $ا ب$  و  $ا د$  و  $ب د$  على  $ا ب$  و  $ا د$  بالتناظر  
 وان يمد  $ا ب$  بكية  $ك = ب - ا$  ثم يكمل المستطيل  $ا ك ل ه$   
 فتارة المستطيل  $ا ك ل ه$  كناية عن مجموع الخطين  $ا ب$  و  $ب د$  وارتفاعه  
 $ا ه$  هو فرق هذين الخطين واذاً فالمستطيل  $ا ك ل ه = (ا + ب) \times (ب - ا)$

لكن هذا المستطيل مركب من جزئين  $ا ب ج ه$  و  $ب د ج ك$   
 وحيث ان الجزء  $ب د ج ك$  يساوي المستطيل  $ا ب د ه$   
 اذ  $ب د = د ه$  و  $ب ك = ه و$  فيكون  
 $ا ك ل ه = ا ب ج ه + ب د ج ك$  ومن الواضح



ان هذين الجزئين كناية عن المربع  $ا ب د ه$  و مظهرها  
 منه  $ا ب ج ه$  ط الذي هو المربع المنشأ على  $ب د$  فمن حينئذ يكون  
 $(ا + ب) \times (ب - ا) = (آ - ب) \times (ب - ا)$

(تنبيه) هذه القضية تستنتج أيضاً من القانون الجبري الآتي وهو  
 $(ب - ا) \times (ب + ا) = ب^2 - ا^2$

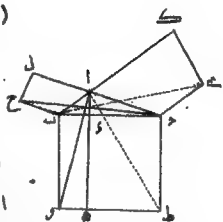
### القضية الحادية عشر

#### نظريه

مربع وتر المثلث القائم الزاوية يساوي مجموع مربعي الضلعين الآخرين

(٩٤)

ليكن  $ا ب ج$  مثلثاً قائم الزاوية في  $ا$  فن بعد  
رسم مربعات على الاضلاع الثلاثة ينزل العمود  
ا ح على القعر من رأس الزاوية القائمة ويمد  
العمود المذكور الى  $هـ$  ثم بعد ذلك يوصل  
القطران او  $د ح$



فيذا تكون الزاوية  $ا ب$  ومركبة من الزاوية  $ا ب د$  ومن الزاوية القائمة  $د ب و$   
وتكون الزاوية  $د ب ج$  مركبة من الزاوية  $ا ب د$  المذكورة ومن الزاوية القائمة  
 $ا ب ج$  واذاً تكون الزاوية  $ا ب د = د ب ج$  لكن  $ا ب = د ب ج$  لانها ضلعان  
من مربع واحد وكذا  $ا ب = د ب د$  فعلى ذلك يكون في المثلثين  $ا ب د$  و  $د ب ج$   
زاويتان متساويتان محصورتا بين اضلاع متساوية وبذا يكونان متساويين  
(قضية ٥ مقالة ١)

وبذا يشاهد ان المثلث  $ا ب د$  نصف المستطيل  $ا ب د هـ و$  (أو بالاختصار  $د هـ$ )  
المتمدد في القاعدة  $د و$  والارتفاع  $ا د$  (قضية ٤) وان المثلث  $د ب ج$   $د ب ج$   
أيضاً هو نصف المربع  $ا ب ج$  لانه من كون الزاوية  $ا ب د$  قائمة وكذا الزاوية  
 $د ب ج$   $ا ب ج$  يكون  $ا ب د$  مستقيماً واحداً مؤزياً  $د ب ج$  وعلى ذلك فالمثلث  
 $د ب ج$  والمربع  $ا ب ج$  المتدان في القاعدة  $د ب ج$  يكونان متساويين أيضاً في الارتفاع  
 $ا ب$  وبذا يكون المثلث نصف المربع

وحيث قد سبق الاثبات على ان المثلث  $ا ب د$  ويساوي المثلث  $د ب ج$  فعلى ذلك يكون

احمد نجيب

٣ م هكذا



(٩٣)

المستطيل  $د ه و$  هو الذي هو ضعف المثلث  $ا ب و$  مكافئ للمربع  $ا ب ج$  الذي هو ضعف المثلث  $ج د و$  ويبرهن بمثل ما ذكر على ان المستطيل  $د ه و ط$  يكافئ للمربع  $ا ب ج$  لكن المستطيلات  $د ه و و د ه و ط$  باجتماعهما مع بعضهما يكونان المربع  $د ه ط$  ونحينئذ يكون المربع  $د ه ط$  المنشأ على الوتر مساوياً لمجموع المربعين  $ا ب ج و ج د و$   $ا ب ج$  المنشأين على الضلعين الآخرين  
وحيث ان مساحة المربع كناية عن مربع العدد الدال على ضلعه فنحذف  
المساوية  $د ه ط = ا ب ج + ج د و$  التي معناها ان مربع العدد الدال على الوتر يساوي  
مجموع مربعي العددين الدالين على الضلعين الآخرين

(نتيجة ١) مربع أحد ضلعي الزاوية القائمة يساوي مربع الوتر ناقصاً بمربع  
الضلع الآخر وهذا يعبر عنه هكذا  $ا ب ج = د ه ط - ج د و$

(نتيجة ٢) ليكن  $ا ب د ه$  مربعاً  $ا د$  قطره فمن كون المثلث  $ا ب د$  قائم  
الزاوية ومتساوي الساقين يحدث  $ا د ج = ا ب ج + ج د و$  ومن ذا يعلم ان المربع المنشأ على



القطر  $ا د$  ضعف المربع المنشأ على الضلع  $ا ب$

$$\frac{ا ب ج}{ا ب} = \frac{ا د ج}{ا ب}$$

ربما ان

فانه باستخراج الجذر التربيعي يحدث  $\sqrt{ا ب ج} = \sqrt{ا د ج}$

ومن ذا يعلم انه لا يوجد مقياس مشترك بين قطر المربع و ضلعه

(نتيجة ٣) قد ثبت ان المربع  $ا ب ج$  يكافئ للمستطيل  $د ه و$  فمن حيث

$$\frac{25}{5} = \frac{25}{5}$$
$$\frac{20}{32} = \frac{5}{8}$$
$$\frac{50}{25} = \frac{50}{25}$$

## تعریف

ا، ب على المستقيم د هـ

## القضية الثانية عشر نظريه

في كل مثلث مربع الضلع المقابل لزاوية حادة يساوي مجموع مربعي الضلعين الآخرين ناقصاً ضعف المستطيل المكون من احد هذين الضلعين ومن مسقط الاخر على الاول  
فاذا كانت د زاوية حادة في المثلث ا ب د وانزل العمود

ا هـ على ب د يكون  $ا ب^2 = ا د^2 + ب د^2 - ٢ ب د \times د هـ$



وللبرهنة على ذلك تعتبر حالتان

(الحالة الاولى) اذا وقع العمود داخل المثلث ا ب د فانه يحدث  $ب د = د هـ + هـ ج$

ب د - د هـ = هـ ج واذن (قضيه ٩) يكون  $ب د^2 = ا د^2 + د هـ^2 - ٢ د هـ \times ج د$

فاذا اضيف  $ا د^2$  على الطرفين ولوحظ ان المثلثين ا ب د و ا هـ د

القائمي الزاوية يأتى منهما  $ا د^2 = ب د^2 - د هـ^2$  و  $ا د^2 = ا هـ^2 - د هـ^2$

فانه يحدث  $ا ب^2 = ب د^2 + ا د^2 - ٢ د هـ \times ج د$

(الحالة الثانية) اذا وقع العمود ا د خارج المثلث ا ب د كان ب د

$$ب د = د هـ - هـ ج$$

واذن (قضيه ٩) يكون  $ب د^2 = ا د^2 + د هـ^2 - ٢ د هـ \times ج د$

$$ب د^2 = ا د^2 + د هـ^2 - ٢ د هـ \times ج د$$



فاذا اضيف  $ا د^2$  للطرفين يستنتج بمثل ما ذكرنا

$$\overline{a}^2 = \overline{b}^2 + \overline{c}^2 - \overline{a}^2 \quad \text{و} \quad \overline{b}^2 = \overline{a}^2 + \overline{c}^2 - \overline{b}^2$$

### القضية الثالثة عشر

نظريه

في مثلث منفرج الزاوية مربع الضلع المقابل للزاوية المنفرجة يساوي مجموع مربعي الضلعين الآخرين زائداً ضعف المستطيل المكون من احد هذين الضلعين ومن سقط الآخر على الاول

فإذا كان  $\Delta$  الضلع المقابل للزاوية المنفرجة  $\Delta$  من المثلث  $\Delta$  ومدا  $\Delta$  عموداً على  $\Delta$  يكون



$$\overline{a}^2 = \overline{b}^2 + \overline{c}^2 - \overline{a}^2 \quad \text{و} \quad \overline{b}^2 = \overline{a}^2 + \overline{c}^2 - \overline{b}^2$$

وللبرهنة على ذلك يقال انه لا يمكن وقوع العمود داخل المثلث اذ لو وقع في  $\Delta$  مثلاً لوجدت الزاوية القائمة  $\Delta$  والزاوية المنفرجة  $\Delta$  معاً في المثلث  $\Delta$  وهو محال فعلى ذلك يقع في الخارج ويحدث  $\Delta = \Delta + \Delta$  ومن هذا يستنتج (قضيه ٨) ما هو آت

$$\overline{a}^2 = \overline{b}^2 + \overline{c}^2 - \overline{a}^2 \quad \text{و} \quad \overline{b}^2 = \overline{a}^2 + \overline{c}^2 - \overline{b}^2$$

وبله ضافه  $\Delta$  للطرفين واجراء الاختصار كما في النظرية المتقدمة ينتج ان

$$\overline{a}^2 = \overline{b}^2 + \overline{c}^2 - \overline{a}^2 \quad \text{و} \quad \overline{b}^2 = \overline{a}^2 + \overline{c}^2 - \overline{b}^2$$

(تنبیه) المثلث القائم الزاوية هو الذي يكون فيه درجتين مجموع مربعي ضلعين يساوي مربع الضلع الثالث لانه اذا كانت الزاوية المحصورة بين هذين الضلعين

احد حجب

(٩٧)

حادة كان مجموع مربعيهما الأكبر من مربع الضلع المقابل لها وإذا كانت منفرجة كان  
المجموع المذكور أقل من ذلك

### القضية الرابعة عشر

نظريه

في أي مثلث مثل  $abc$  إذا مد الخط  $a$  من رأسه إلى منتصف فاعديه فإنه

$$يحدث \quad \overline{ab}^2 + \overline{ac}^2 = \overline{ad}^2 + \overline{bc}^2$$

والبرهنة على ذلك ينزل العمود  $ad$  على  $bc$  فعلى

مقتضى النظرية الثانية عشر يحدث من المثلث  $abd$

ما هوأت



$$\overline{ad}^2 = \overline{ab}^2 - \overline{bd}^2 = \overline{ac}^2 - \overline{cd}^2$$

وعلى مقتضى النظرية الثالثة عشر يحدث من المثلث  $abd$  ما هوأت

$$\overline{ab}^2 = \overline{ad}^2 + \overline{bd}^2 + \overline{bd} \times \overline{dc}$$

وحينئذ إذا جمع ولوحظ أن  $db = dc$  يحدث

$$\overline{ab}^2 + \overline{ac}^2 = \overline{ad}^2 + \overline{bc}^2$$

### القضية الخامسة عشر

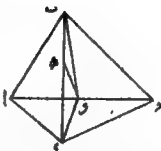
نظريه

في كل شكل رباعي مجموع مربعات اضلاعه الأربعة يساوى مجموع مربعي قطريه

زائدًا أربعة أمثال مربع الخط الموصل بين منتصفيهما

(٩٨)

ليكن  $ا د$  ,  $ب د$  قطري الشكل الرباعي  $ا ب د د$   
 منتصفيهما ولنصل الخطوط  $ب و$  ,  $د و$



نفعل مقتضى النظرية المتقدمة يحدث

$$ا ب د + ب د د = ا د د + د ب د \quad \text{من المثلث ا ب د}$$

$$ا د د + د ب د = ا د د + د ب د \quad \text{ومن المثلث ا د د}$$

وبالجمع يحدث

$$ا ب د + ب د د + ا د د + د ب د = ا د د + د ب د + (ا د د + د ب د)$$

وحيث انه يحدث من المثلث  $ب و د$  ما هو ان

$$ب و د + د و ب = ا د د + د ب د$$

يكون

$$ا ب د + ب د د + ا د د + د ب د = ا د د + د ب د + ا د د + د ب د$$

وحيث ان

$$ا د د = ا د د , د ب د = د ب د$$

يحدث اخيراً

$$ا ب د + ب د د + ا د د + د ب د = ا د د + د ب د + ا د د + د ب د$$

ونتيجه ان كان الشكل الرباعي متوازي الاضلاع فان المستقيم  $هـ$  يكون  
 معدوماً وبذا يعلم انه في كل متوازي اضلاع مجموع مربعات الاضلاع الاربعة

(٩٩)

يساوى مجموع مربعى القطرين  
وعكس هذه النظرية الأخيرة صحيح

في المخطوط المناسبة وفي التشابه  
القضية السادسة  
نظريه

كل مستقيم وازى احد اضلاع مثلث يقسم الضلعين الاخرين الى اجزاء مناسبة  
لانه اذا وصل  $د هـ$  كان المثلثان  $د هـ ب$   
ممتددين في القاعدة  $د هـ$  وممتددين في الارتفاع  
أيضاً لوجود الرأسين  $د هـ$  على مستقيم مواز للقاعدة



فعلى هذا يكون المثلثان المذكوران متكافئين  
والمثلثان  $د هـ ب$  المشتركان في الرأس  $هـ$  ممتددان في الارتفاع فتكون  
النسبة بينهما كالنسبة بين قاعدتيهما  $د هـ$  و  $ب هـ$  بمعنى ان

$$\frac{د هـ}{ب هـ} = \frac{د هـ}{ب هـ}$$

والمثلثان  $د هـ ب$  المشتركان في الرأس  $هـ$  ممتددان في الارتفاع  
أيضاً فتكون النسبة بينهما كالنسبة بين قاعدتيهما  $د هـ$  و  $ب هـ$  بمعنى ان

$$\frac{د هـ}{ب هـ} = \frac{د هـ}{ب هـ}$$

فبسبب تساوى المثلثين  $د هـ ب$  و  $د هـ ب$  ووجود النسبة المشتركة بين

$$\frac{د هـ}{ب هـ} = \frac{د هـ}{ب هـ}$$

(١٠٠)

(نتيجة ١) ينتج مما ذكرنا  $\frac{ا ا}{ا ب} = \frac{ا ا}{ا ب + ا د} = \frac{ا ا}{ا ب + ا د}$  اي  $\frac{ا ا}{ا ب} = \frac{ا ا}{ا ب + ا د}$

وان  $\frac{ا ب}{ا د} = \frac{ا ب}{ا ب + ا د} = \frac{ا ب}{ا ب + ا د}$  اي  $\frac{ا ب}{ا د} = \frac{ا ب}{ا ب + ا د}$

(نتيجة ٢) اجزاء المستقيمين ا ب د د المعينة بجملة مستقيمتين متوازيين  
مثل ا د ه و ط ج ب د ..... الخ تكون متناسبة

لانه اذا كانت ه نقطة تقابل المستقيمين ا ب د و  
فان المثلث ه و يكون فيه الخط ا د موازياً

للقاعدة ه و ومن ذايحدث  $\frac{ا ا}{ا ب} = \frac{ا د}{ا ب}$

ومن المثلث ه و ط ج ايضاً  $\frac{ا د}{ا ب} = \frac{ا د}{ا ب}$

فيسبب النسبة المشتركة يحدث  $\frac{ا ا}{ا ب} = \frac{ا د}{ا ب}$

وبمثل ذلك يبرهن على ان  $\frac{ا د}{ا ب} = \frac{ا د}{ا ب}$  وبذا اثبت المطلوب

القضية السابعة عشر

نظريه  
اذا (بعكس ما تقدم) كان المستقيمان ا ب د ا د مقطوعين على التناسب

بالخط ه ا اي اذا كان  $\frac{ا ا}{ا ب} = \frac{ا ا}{ا ب}$

فان الخط ه ا يكون موازياً للقاعدة ب د

لانه انما يمكن ه موازياً ب د وفرض ان د و  
هو الموازي له فانه على مقتضى النظرية المتقدمة يحدث

هذا التناسب



احمد نجيب

ه م هـ



$$\frac{ا}{ب} = \frac{ا}{ب}$$

$$\frac{ا}{ب} = \frac{ا}{ب}$$

$$\frac{ا}{ب} = \frac{ا}{ب}$$

لكن بالفرض

فعلى ذلك يحدث

وهو تناسب لا يمكن حصوله لأن المقدم  $ا$  أكبر من  $ا$  من جهة والنال  $ب$  أصغر من  $ب$  من الجهة الأخرى وحينئذ لا يمكن أن يكون الموازي  $و$  المتضمن  $ز$  مختلفا عن  $ز$  وبناء عليه يكون  $ز$  هو الموازي المذكور رتبته (الامر يكون كما ذكر اذا فرض التناسب  $\frac{ا}{ب} = \frac{ا}{ب}$ )  
لأنه من هذا التناسب يحدث  $\frac{ا-ا}{ا} = \frac{ب-ب}{ب}$  أو  $\frac{ا-ا}{ا} = \frac{ب-ب}{ب}$   
أو  $\frac{ا}{ب} = \frac{ا}{ب}$

القضية الثامنة عشر

نظريه

المستقيم  $ا$  المنصف للزاوية  $ا$  من المثلث  $ا ب ج$  يقسم القاعدة  $ب ج$  الى جزئين  $ب د$  و  $د ج$  مناسبين للضلعين  $ا ب$  و  $ا ج$  والمستقيم  $ا$  المنصف للزاوية الخارجة  $د ا ه$  يعين على امتداد القاعدة جزئين  $ب د$  و  $د ج$  مناسبين للضلعين  $ا ب$  و  $ا ج$  أيضا

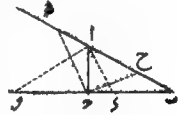
(برهان الامر الاول) ان يرسم من النقطة  $د$

مستقيم  $د ه$  موازي  $ا$  ويمد الى ان يقابل امتداد

$ب ج$  فالمثلث  $د ه ج$  يكون فيه الخط  $ا$  موازيا

للقاعدة وبذا (قضية ١٦) يحدث  $\frac{ا}{ب} = \frac{ا}{ب}$

لكن المثلث  $ا د ه$  متساوي الساقين لأن من توازي  $ا$  و  $د ه$  تكون الزاوية



ا د = هـ و ا د والزاوية ا هـ = ب ا وحيث ان و ا د = ب ا و بالافترض  
ف تكون المزاوية ا د هـ = ا هـ و اذن يكون ا هـ = ا د وعلى ذلك اذا وضع  
ا د عرضاً عن ا هـ في النسب المتقدم يحدث

$$\frac{ب}{د} = \frac{د}{و}$$

(برهان الامر الثاني) ان يمد مستقيم د ج يوازي او من المثلث ب ا و يحدث

$$\frac{ب}{ا} = \frac{د}{ج}$$

وبمثل ما تقدم يتبين ان المثلث ا ج د متساوي الساقين وان ا ج = ا د فعلى

$$\frac{ب}{ا} = \frac{د}{و}$$

ذلك يكون

(نتيجة) اذا تحركت النقطة ا في المستوى بحيث أن نسبة ا ب الى ا د تبقى  
دائماً مساوية  $\frac{ب}{د}$  فان منصفى الزاويتين ب ا د , ا د هـ ا د يمان دائماً بالنقطتين  
د , و لانه يجب ان يكون كل من النسبتين  $\frac{ب}{د}$  ,  $\frac{ب}{و}$  باقياً على كونه مساوياً  
 $\frac{ب}{د}$  ومع ذلك فان المستقيمين ا د , ا و المنصفين للزاويتين  
المتجاورتين متعامدان فعلى ذلك تكون النقطة ا في جميع أوضاعها موجهة  
على محيط الدائرة المرسوم بجعل و د قطراً ومن ذا ينح  
ان المحل الهندسي للنقط التي بعد اكل منها عن نقطتين مثل ب د يكون ا د  
على نسبة معلومة هي محيط دائرة

## تعريف

المثلثان المتشابهان هما مثلثان زواياهما متساوية و اضلاعهما المتناظرة متناسبة

(١٠٣)

أو الاضلاع المتناظرة هي المقابلة للزوايا المتساوية)  
وعلى العموم المضلعان المتشابهان هما ما كانت زواياهما متساوية لكل لنظيره  
واضلاعهما المتناظرة متناسبة (والاضلاع المتناظرة هي المجاورة للزوايا المتساوية)

## القضية التاسعة عشر نظريه

المثلثان المتساويا الزوايا تكون اضلاعهما المتناظرة متناسبة  
ليكن  $abc$  و  $def$  ومثلثين زواياهما متساوية  
كل لنظيره أى  $a = d$  و  $b = e$  و  $c = f$   
فالاضلاع المتناظرة تكون متناسبة بمعنى انه يحدث



$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$   
برهان ذلك ان يؤخذ  $ac = de$  و  $ab = de$  و يوصل  $c$  ط فالمثلثان  
 $ac$  ط و  $de$  و يكونان متساويين لان فيهما زاويتين متساويتين ومحورتين  
بين اضلاع متساوية فعلى ذلك تكون الزاوية  $ac$  ط مساوية للزاوية  $de$   
وحيث كانت  $c = e$  فتكون الزاوية  $b = ac$  ط و ان يكون  $c$  ط  
موازيا  $b$  و يحدث (قضية ١٦) هذا التناسب

$\frac{a}{d} = \frac{b}{e}$   
واذا مد  $ط$  موازيا  $ab$  يحدث أيضا (قضية ١٦) هذا التناسب

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \text{ أو } \frac{a}{b} = \frac{d}{e}$$

لأن المستقيمين مدورج ط متساويان لكونهما متوازيين محصورين بين خطين  
متوازيين فإذا صار مقدار الزاوية المتساوية المتساوية المتساوية  
للنسبة المشتركة يحدث

$$\frac{ab}{ac} = \frac{ab}{ap} = \frac{ab}{ac}$$

$$\frac{ab}{ac} = \frac{ab}{ap} = \frac{ab}{ac}$$

أرى (نتيجة) يكفي في تشابه المثلثين أن يكون في كل منهما زاويتان متساويتان نظيرتيهما  
من الأخر لأن الزاوية الثالثة من كل منهما تكون حينئذ متساوية لنظيرتيهما من الأخر  
وبذا يكون المثلثان متساويي الزوايا

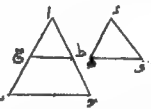
### القضية العشرون نظريه

المثلثان اللذان اضلاعهما متناسبة تكون زواياهما متساوية

أي إذا فرض أن  $\frac{ab}{ac} = \frac{ab}{ap} = \frac{ab}{ac}$  فإن

زوايا المثلثين  $abc$  و  $apc$  تكون متساوية

بمعنى أن  $a = p$  و  $b = c$  و  $c = a$



برهان ذلك أن يرخذ  $ac = pc$  و  $ab = pc$  و  $ap = bc$  فإن يوصل ج ط فن

$$\frac{ab}{ac} = \frac{ap}{ac} \quad \text{فرض القضية يحدث}$$

$$\frac{ab}{ac} = \frac{ap}{ac} \quad \text{وهو عبارة عن}$$

ومن ذابنح ان ج ط يوازي د ه وبنا على ذلك تكون الزاوية ا ج ط = ا د ه  
وحيث انه بمقتضى النظرية المتقدمة تكون زوايا المثلثين ا ب د , ا ج ط مساوية

$$\text{حينئذ فيحدث} \quad \frac{ا ب}{ج ط} = \frac{ا د}{ه ط} = \frac{ا ج}{ه د}$$

$$\text{لكن بالفرض} \quad \frac{ا ب}{د ه} = \frac{ا د}{ه و} = \frac{ا ج}{ه و}$$

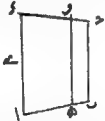
وحيث ان ا ج = د ه , ا ط = د و , و يكون ج ط = ه و وبذا يكون المثلثان  
ا ج ط , د ه و متساويين لتساوي اضلاعهما المتناظرة وبذا تكون الزاوية  
د ه و = ا ج ط = ا د ه والزاوية د و ه = ا ط ج = ا د ه والزاوية د = ا  
( تنبيه ١ ) يلزم التنبيه لان الزوايا المتساوية في المثلثين مقابلة للاضلاع المتناسبة  
( تنبيه ٢ ) يشاهد من هاتين القصيتين الاخيريتين ان تساوي الزوايا في المثلثين  
تابع لتناسب الاضلاع والعكس بالعكس بحيث ان احدهما من الشرطين يكفي  
في التحقق من تشابه المثلثين وليس الامر كذلك في الاشكال التي اضلاعها أكثر من  
ثلاثة لانه بمجرد اعتبار الاشكال الرباعية يمكن بدون تغير الزوايا اختلال تناسب  
الاضلاع ويمكن بدون خلل في الاضلاع تغير الزوايا فعلى ذلك تناسب الاضلاع  
لا يتأتى من تساوي الزوايا بل لا يتساوى الزوايا يتأتى من تناسب الاضلاع

فن الراضح مثلاً لانه اذا م د ه و موازياً د ه

كانت زوايا الرباعي ا ه و د مساوية لزوايا الرباعي

ا د ه و لكن تناسب الاضلاع مختلف ومن الراضح

أيضاً انه بدون تغير الاربعة اضلاع ا د ه و د ه ا يمكن قريباً وبعد النقطة



ب من النقطة د وكل من هذين الاخرين يتأق منه تغير الزوايا  
 (تنبيه ٣) قضية مربع الزوايا والقضيتان المتقدمتان اللتان لا يتكون منهما في الحقيقة  
 القضية واحدة هي القضايا الأكثر من غيرها استعمالاً لأهمية في الهندسة وهي  
 تكفي دون غيرها تقريباً في جميع التطبيقات وفي حل جميع المسائل وسبب ذلك  
 انه يمكن تقسيم جميع الاشكال الى مثلثات وان أي مثلث يمكن تقسيمه الى مثلثين  
 قائمي الزاوية فمن اجل ذلك كانت الخواص العمومية للمثلثات مشتملة اشتمالاً  
 ضيقاً على خواص جميع الاشكال

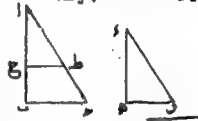
### القضية الحادية والعشرون نظريه

المثلثان اللذان فيهما زاويتان متساويتان ومحصورتان بين اضلاع متناسبة  
 يكونان متشابهين

اي اذا كانت الزاوية  $\alpha = \epsilon$  وفرض أن

$$\frac{ab}{\alpha} = \frac{a'b'}{\epsilon}$$

فإن المثلث  $abc$  يكون متشابهاً للمثلث  $a'b'c'$  وهو



برهان ذلك انه ليؤخذ  $ac = \epsilon$  وان يمد  $c$  ط موازياً ب د فالزاوية

$ac$  ط تكون (قضية هـ، معالمة) مساوية للزاوية  $\alpha$  ب د وزوايا المثلث

$ac$  ط تكون مساوية لزوايا المثلث  $abc$  واذا ن يحدث

$$\frac{ab}{\alpha} = \frac{a'b'}{\epsilon}$$

لكن بالفرض  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  فحينئذ  $a \cdot d = b \cdot c$  ويكون في المثلثين  $a, b, c$  و  $d, c, b$  و  
 زاويتان متساويتان محصورتان بين اضلاع متساوية وبذا يكونان متساويين  
 وحيث ان المثلث  $a, b, c$  ط مشابه للمثلث  $a, b, c$  يكون  $d$  و  $c$  و  $b$  و  $a$  مشابها للمثلث  
 $a, b, c$  أيضا

### القضية الثانية والعشرون نظريه

المثلثان اللذان اضلاعها المتناظرة متوازية أو متعامدة يكونان متشابهين  
 لانه اذا كانت  $a, b, c$  زوايا احد المثلثين و  $a', b', c'$  زوايا المثلث  
 الاخر فمن المعلوم ان كل زاويتين توازيتا توازيتا اضلاعها أو تعامدتا تكونان  
 متساويتين او مكملتين لبعضهما

فعلى ذلك لا يمكن ان يفرض الا احد الفروض الثلاثة الاتية وهي

$$\text{الاول } a + a' = 180^\circ, b + b' = 180^\circ, c + c' = 180^\circ$$

$$\text{الثاني } a + a' = 90^\circ, b + b' = 90^\circ, c + c' = 90^\circ$$

$$\text{الثالث } a = b, b = c, c = a \text{ وبنا عليه } a = b = c$$

وحيث ان مجموع زوايا المثلثين يكون في الفرض الاول مساويا ست قوائم  
 وان هذا المجموع يكون في الفرض الثاني اكبر من اربع قوائم كان الفرض الثالث  
 مقبولا دون غيره فحينئذ يكون المثلثان متساويي الزوايا وبذا يكونان متشابهين

(تنبيه) الاضلاع المتناظرة في المثلثين هي الاضلاع المتوازنة أو المتعامدة

### القضية الثالثة والعشرون

نظريه

إذا فرض أي مضلع ممكن دائماً أن يرسم مضلع ثانٍ بحيث يكون هذان المضلعان مركبين من مثلثات متشابهة متحدة العدد ومتشابهة الوضع

ليكن  $abc$  هو المضلع المعلوم فلنبرهنه على ما ذكره من الرأس  $a$  القطران  $ad$  ،  $ae$  ثم بعد أن تؤخذ نقطة بالاختيار مثل  $f$



على المضلع  $ab$  يمد  $ba$  ليوازي  $ed$  ،  $ac$  ليوازي  $ef$  ثم  $cd$  ليوازي  $fd$  فالمثلثان  $abd$  ،  $ace$  ... الخ تكون متشابهة على

التناظر للمثلثات  $abd$  ،  $ace$  ، ... الخ والمضلعان  $abc$  ،  $def$  المكن مع ذلك وضعهما بكيفية حيثما اتفقت بالنسبة لبعضهما يصيران مركبين من عددٍ واحدٍ من مثلثات متشابهة شكلاً ووضعاً

### القضية الرابعة والعشرون

نظريه

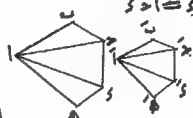
المضلعان  $abc$  ،  $def$  رأيت  $abc$  المركبان (كما شهد سابقاً) من عدد واحدٍ من مثلثات متشابهة شكلاً ووضعاً تكون زواياها متساوية كل نظيره واضلاعهما المتناظرة تكون متناسبة وبذا يكونان متشابهين لانه من تشابه المثلثين  $abc$  ،  $def$  تكون الزاوية  $abc = def$



(١٠٩)

والزاوية  $\angle \alpha = \angle \beta$  ومن تشابه المثلثين  $\alpha$  و  $\beta$  ، يكون الزاوية

ومنه ينتج ان الزاوية  $\angle \alpha = \angle \beta$  وهكذا  
وزيادة على ذلك فانه من تشابه المثلثات  
المذكورة يحدث تناسب الكثير للعدد الآتي وهو

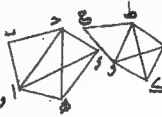


$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\epsilon}{\zeta} = \frac{\eta}{\theta} = \frac{\iota}{\kappa} = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\nu}{\xi}$$

بمعنى ان الاضلاع المناظرة في المضلعين متناسبة ايضاً وحينئذ يكونا متشابهين  
القضية الخامسة والعشرون  
نظريه

(بعكس النظرية المتقدمة) للمضلعان المتشابهان يمكن تحليلهما الى عدد واحد  
من المثلثات المتشابهة شكلاً ووضعاً

والبرهنة على ذلك تؤخذ زاوية مثل  $\alpha$  من  
المضلع  $\alpha$  و  $\beta$  ويمد منها القطران  $\alpha$  و  $\beta$   
وفي المضلع الآخر  $\gamma$  و  $\delta$  تؤخذ الزاوية و  
المناظرة للزاوية  $\alpha$  ويمد منها القطران  $\gamma$  و  $\delta$  ومنه فنحن حيث ان المضلعين  
متشابهان تكون الزاوية  $\alpha$  و  $\beta$  مساوية لنظيرتها  $\gamma$  و  $\delta$  وزيادة على ذلك يكون  
الضلعان  $\alpha$  و  $\beta$  متناسين للضلعين  $\gamma$  و  $\delta$  ط بحيث يحدث



$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$$

فحينئذ يكون في المثلثين  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  و  $\delta$  زاويتان متساويتان ومصورتاين اضلاع

متناسبة وبذا يكونان متشابهين ( قضية ١٤ ) وعلى هذا تكون الزاوية  $\alpha$  مساوية  $\beta$  و  $\gamma$  فاذا طرح هاتان الزاويتان من الزاويتين المتساويتين  $\alpha$  و  $\beta$  رجع  $\gamma$  كان الباقيان  $\alpha$  و  $\beta$  متساويين لكن حيث ان المثلثين  $\alpha$  و  $\beta$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$$

رجع  $\gamma$  متشابهان فانه يحدث

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$$

ومع ذلك فانه من تشابه المثلثين يحدث

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$$

فعلى ذلك يكون

وحيث تبين فيما سبق ان الزاوية  $\alpha = \beta$  و  $\gamma = \delta$  فيكون في المثلثين  $\alpha$  و  $\beta$  زاويتان متساويتان محصورتان بين اضلاع متناسبة وبذا يكونان متشابهين وحيث انه بالاستمرار على هذا المنوال يمكن اثبات تشابه المثلثات التالية مهما كانت عدد اضلاع المضلعين المفروضين فينتج من ذلك ان المضلعين المتشابهين يتركبان من عددي واحد من المثلثات المتشابهة شكلاً و وضعاً

( تنبيه ) التحليل المذكور يمكن اجرائه بجملة أوجه وذلك بان قد الاقطار من رأسين متناظرين حيثما التقعا فنما ينتج انه في المضلعين المتشابهين تكون النسبة بين أى قطرين متناظرين  $\alpha$  و  $\beta$  مثلاً كالنسبة بين أى ضلعين متناظرين لان هذين القطرين انما هما ضلعان متناظران من مثلثين متشابهين  $\alpha$  و  $\beta$  رجع  $\gamma$  داخلين في تركيب المضلعين

### القضية السادسة والعشرون

نظريه

المستقيمت او  $\alpha$  و  $\beta$  ... الخ الممتدة حيثما يراد من رأس أى مثلث تقسم

القاعدة ب د وموازيها و ه الى اجزاء متناسبة بحيث يحدث

$$\frac{ا ب}{ب ج} = \frac{ب ج}{ج د} = \frac{ب د}{د ه} = \frac{ب د}{ج ه} = \dots$$

لانه من حيث ان و ه يوازي ب د وتكون

زوايا المثلث ا د ه مساوية لزوايا المثلث

ا ب د ويحدث التناسب  $\frac{ا ب}{ب ج} = \frac{ب د}{د ه}$

وايضاً من حيث ان ه ك يوازي ج د يحدث  $\frac{ب ج}{ج د} = \frac{ب د}{د ه}$

فلذا هي النسبة المشتركة يحدث  $\frac{ب ج}{ج د} = \frac{ب د}{د ه}$

وبمثل ذلك يوجد ان  $\frac{ب د}{د ه} = \frac{ب د}{ج ه}$  وهكذا وبذا يكون الخط و ه

منقسماً في النقطة ه ك ل ك انقسام القاعدة في النقط ر ج ط

(نتيجة) ينتج مما ذكرناه اذا كان ب د منقسماً الى اجزاء متساوية في النقط

ر ج ط فان موازيه و ه يكون منقسماً الى اجزاء متساوية ايضاً في النقط ه ك ل

### القضية السابعة والعشرون

نظريه

في اي مثلث قائم الزاوية اذا انزل العمود ا د من الزاوية القائمة ا على

الوتر ب د

فأولاً المثلثان الجزئيان ا د ب و ا د ج يكونان متشابهين وكل منهما يكون

متشاهماً للمثلث الكلي ا ب د

وثانياً كل من الضلعين ا ب و ا د يكون وسطاً متناسباً بين الوتر ب د ومجاوره

الضلع من القطعتين  $د$  و  $ر$  و

وثالثاً العنود  $د$  يكون وسطاً متناسباً بين القطعتين  $د$  و  $ر$  و

(برهان ذلك) أولاً من حيث ان المثلثين  $د$  و  $ر$  و  $د$  مشتركان في الزاوية

$د$  وان الزاوية القائمة  $د$  و  $د$  تساوي الزاوية

القائمة  $د$  و فتكون الزاوية الثالثة  $د$  و



من المثلث الاول مساوية للزاوية الثالثة  $د$  من

المثلث الثاني وبذا يكون هذان المثلثان متساويي الزوايا ومقتضاهما

يمثل هذا برهن على ان المثلث  $د$  و يشابه المثلث  $د$  و وحينئذ تكون

البرهان مثلثات متساوية الزوايا ومتشابهة

ثانياً من حيث ان المثلث  $د$  و مشابه للمثلث  $د$  و فان اضلاعها المتناظرة

تكون متناسبة وحيث ان الضلع  $د$  و في المثلث الاصغر مناظر للضلع  $د$  و من

المثلث الاكبر لمقا بلتهما الزاويتين المتساويتين  $د$  و  $د$  و  $د$  و ان الوتر  $د$  و

من المثلث الاصغر مناظر للوتر  $د$  و من المثلث الاكبر فانه يمكن تشكيل هذا التنا

$$\frac{د}{د} = \frac{د}{د}$$

$$\frac{د}{د} = \frac{د}{د}$$

ويمثل هذا يحدث

وبذا يثبت الامر الثاني وهو ان كل من الضلعين  $د$  و  $د$  وسط متناسب

بين الوتر والقطعة المجاورة للضلع

ثالثاً من تشابه المثلثين  $د$  و  $د$  و يحدث بمقارنة الاضلاع المتناظرة

احمد نجيب

هـ

م ٤٨

بعضها هذا التناسب

$$\frac{ب}{ا} = \frac{د}{ز}$$

وبذا اثبت الامر الثالث وهو ان العمود  $ا$  وسط متناسب بين قطعتي الوتر  $هـ$  و  $و$  (قضية ١٢) اذا وضع التساوي بين حاصل ضرب الطرفين وحاصل ضرب الوسطين في التناسب  $\frac{ب}{ا} = \frac{د}{ز}$  يحدث  $ا^2 = ب \times د$  وبمثل ذلك يحدث  $ا^2 = د \times ب$  واذن يكون  $ا^2 = ب \times د = د \times ب$  وبمثل ذلك يحدث

وحيث ان الطرف الثاني عبارة عن  $(ب + د) \times ا$  وان هذا يقول الى  $ب \times د + د \times ب$  أي  $ا^2$  فيكون  $ا^2 = ب \times د + د \times ب$  وحينئذ (بالارتكان على مساحة المربع) يكون المربع المنشأ على الوتر  $ب$  يساوي مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين  $ا$  و  $د$  وبذا صار الوقوع في قضية مربع الوتر بطريقة مخالفة جداً للطريقة التي سبق اتباعها ومن ذا يشاهد ان قضية مربع الوتر تتأني في الحقيقة من تناسب الاضلاع في المثلثات المتساوية المروايا

(نتيجته) اذا اخذت قطعة مثل  $ا$  من محيط دائرة ووصل بينها وبين نهايتي القطر

$ب$  و  $د$  بالوترين  $ا$  و  $د$  فانه المثلث  $ب ا د$

يكون قائم الزاوية في (قضية ١٩ مقالة ٤)

ومن ذا يتبع ان  $ا$  لأن العمود  $ا$  وسط متناسب



بين قطعتي القطر  $هـ$  و  $و$  أي ان المربع  $ا^2$  يساوي المستطيل  $ب \times د$  و ثانياً ان الوتر  $ا$  وسط متناسب بين القطر  $ب$  و القطعة  $د$  أي ان

١٢ = ١٠ × ٨ × ٦ = ٤٨٠ ويحل هذا يحدث ١٢ = ١٠ × ٨ × ٦ = ٤٨٠ فعلى ذلك يكون

$$\frac{١٢}{١٠} = \frac{٨}{٦}$$

وإذا صار مقارنة ١٢، ١٠، ٨ ببعضها يحدث

$$\frac{١٢}{١٠} = \frac{٨}{٦}$$

$$\frac{١٢}{٨} = \frac{١٠}{٦}$$

ويحدث أيضاً

هذه النسب الكائنة بين مربعات الاضلاع سواء كان بين مربعي الضلعين فقط أو بين مربع احدها ومربع الوتر قد سبق إيجادها في نتيجتي ٣، ٤ من القضية الحادية عشر

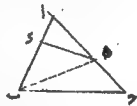
### القضية الثامنة والعشرون نظريه

المثلثان اللذان فيهما زاويتان متساويتان تكون النسبة بينهما كالنسبة بين مستطيلي الاضلاع المحيطة بالزاويتين المتساويتين

فنسبة للمثلث ا ب د الى المثلث ا د هـ مثلاً

كنسبة المستطيل ا ب د الى المستطيل ا د هـ ا ب × ا د

وللبرهنة على ذلك يوصل المستقيم ب هـ فالمثلثات



ا ب د، ا د هـ يكون مشتركتين في الرأس هـ ومتساويتين في الارتفاع وبذا

تكون النسبة بينهما كالنسبة بين قاعدتيهما ا ب، ا د أي  $\frac{١٢}{٨} = \frac{١٠}{٦}$

$$\frac{١٢}{٨} = \frac{١٠}{٦}$$

ويحل ذلك يحدث

فإذا ضرب هذان التناسبان في بعضهما على الترتيب وحذف الحد المشترك  
 ا ب يحدث

$$\frac{ا \times ا ب}{ب \times ا ب} = \frac{ا ب}{ب ا}$$

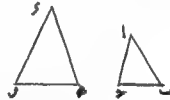
### القضية التاسعة والعشرون نظرية

النسبة بين أى مثلثين متشابهين كالنسبة بين مربعى أى ضلعين متناظرين من أضالئهما

لكن الزاوية ١ = س والزاوية ٢ = هـ

فالأمن تساوى الزاويتين ١ ، ٢

يحدث بمقتضى القضية المتقدمة هذا التناسب



$$\frac{ا \times ا ب}{ب \times ا ب} = \frac{ا ب}{ب ا}$$

وهو تناسب يمكن كتابته هكذا

$$\frac{ا}{ب} \times \frac{ا}{ب} = \frac{ا ب}{ب ا}$$

وحيث أنه من تشابه المثلثين المفروضين يحدث

$$\frac{ا}{ب} = \frac{ا}{ب}$$

$$\frac{ا}{ب} = \frac{ا}{ب} \times \frac{ا}{ب} = \frac{ا ب}{ب ا}$$

فيكون

### القضية الثلاثون

نظرية

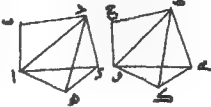
النسبة بين محيطى أى مضلعين متشابهين كالنسبة بين أى ضلعين متناظرين من

(١١٦)

اضلاعها والنسبة بين سطحيهما كالنسبة بين مربعي هذين الضلعين  
لأنه أولاً من تشابه الضلعين يحدث

$$\frac{ك}{ح} = \frac{د}{ط} = \frac{ب}{ع} = \frac{ا}{و}$$

ومن هذا يحدث



$$\frac{ا}{و} = \frac{ك + د + ب + ح}{و ح ط ع + د ط ع + ب ط ع + ح ط ع}$$

وبذا ثبت الجزء الأول من النظرية

ثانياً من حيث ان المثلثين ا ب ح و د ح ط متشابهان فانه (قضيه ٩٩)

$$\frac{ا}{و} = \frac{ب}{ط}$$

وأيضاً من تشابه المثلثين ا د و و ط ع يحدث

$$\frac{ا}{و} = \frac{د}{ط}$$

فلذا هي النسبة المشتركة يحدث

$$\frac{ا}{و} = \frac{د}{ط}$$

وبمثل هذا الدليل يوجد ان

$$\frac{ا}{و} = \frac{د}{ط}$$

ويستمر على هذا المنوال اذا وجدت مثلثات زيادة عما ذكر واذن ينتج من هذه

التناسبات ان

$$\frac{ا}{و} = \frac{ب}{ط} = \frac{ج}{ع} = \frac{د}{ط} = \frac{هـ}{و}$$

وعلى ذلك تكون النسبة بين المضلعين المتشابهين كالنسبة بين مربعي

احمد غريب

هـ

م ٩٩



(١١٧)

ضلعين متناظرين من اضلاعهما

القضية الحادية والثلاثون  
نظريه

الوتران ا ب و د و المقاطعان في دائرة تكون اجزأهما متناسبة تناسبا عكسيا  
اى انه يحدث

$$\frac{ا ب}{و د} = \frac{و د}{ا ب}$$

وللبرهنة على ذلك يوصل المستقيمان ا ب و

فالمثلثان ا د و ب و د يكونان متشابهين

لان زاويتيهمما اللتين رأساهما في و متساويتان

لما يلما بالراس والزاوية ا = د لانهما مرسومتان في قطعة واحدة ( قضية ١٩

مقاله ) والزاوية د = ب بالدليل عينه فننسا به المثلثين المذكورين

يحدث  $\frac{ا ب}{و د} = \frac{و د}{ا ب}$  وهو المقضى اثباته

(نتيجه) من هذا التناسب يستخرج ا ب و د = د و د و ومن هذا يعلم

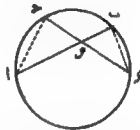
ان مستطيل جزئى ا ب و د يساوى مستطيل جزئى الوتر الاخر

القضية الثانية والثلاثون

نظريه

اذا فرضت نقطة مثل و خارج دائرة ومد منها القاطعين ب و د المنتهين

بالقوس المقعر ب د فان القاطعان الكاملين يكونان مناسبتين تناسبا



عكسياً لمجرئيهما الخارجين أى انه يحدث  $\frac{و}{د} = \frac{و}{د}$   
 لانه اذا وصل ا ح ر ب س يكون المثلثان  
 و ا ح ر و ب س مشتركين فى الزاوية و وزيادة  
 على ذلك فان الزاوية ب = د (قضيه ١٩ مقاله)  
 وبذا يكون هذان المثلثان متشابهين ومن تشابههما يحدث التناسب الاق وهو



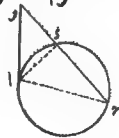
نتيجته من هذا التناسب ينتج ان المستطيل و ا ح ر ب يساوى المستطيل  
 و د ح ر ب

رتبيه هذه القضية تعاضى القضية المتقدمه ولا تختلف عنها الا فى كون  
 المجرئين ا ب ر د س متقاطعين خارج الدائرة

### القضية الثالثة والثلاثون نظريه

اذا فرضت نقطه مثل و خارج دائرة ومد منها مماس مثل و ا وقاطع مثل  
 ر د فان المماس يكون وسطاً متناسباً بين القاطع وجزئه الخارج بحيث يحدث  
 هذا التناسب  $\frac{و}{د} = \frac{و}{د}$  الذى هو كناية عن ر ا = و د و

لانه اذا وصل ا ر د ا ح كان المثلثان و ا ر د  
 مشتركين فى الزاوية و وزيادة على ذلك  
 فان الزاوية و ا ح المشكله من مماس و ر د



نقاس (قضية «) مقالة «) بنصف القوس اء والزاوية د نقاس بنصف  
 القوس عينته فعلى ذلك تكون الزاوية و اء = د وحينئذ يكون المثلثان  
 المذكوران متشابهين ومن تشابههما يحدث هذا التناسب

$$\frac{و}{ا} = \frac{د}{ا}$$

وهو تناسب يحدث منه ق اء = و د و د و د

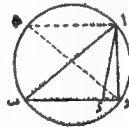
(تنبيه) هذه القضية يمكن استنتاجها من القضية المتقدمة باعتبار المحاسن  
 و ا نهاية الاضلاع التي يأخذها قاطع دائر حول النقطة و

### القضية الرابعة والثلاثون نظريه

في كل مثلث مثل ا ب د مستطيل الضلعين ا ب و د يساوى المستطيل المتكون  
 من القطر د ه المخصوص بالدائرة المرسومة على المثلث ومن العمود اء

المنزل على الضلع الثالث د ه

لانه اذا وصل ا ه كان المثلثان ا ب د و ا ه د  
 قائمي الزاوية احدهما في د والاخر في ا وزيادة  
 على ذلك فان الزاوية ب = ه وبذا يكون



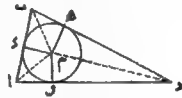
المثلثان المذكوران متشابهين ويحدث منهما هذا التناسب  $\frac{ا ب}{ا د} = \frac{ا د}{ا ه}$

ومنه ينتج ان  $ا ب \times ا ه = ا د \times ا د$

(نتيجة) اذا ضرب طرفاهن للتساوية في د يحدث  $ا ب \times ا د \times ا د = ا د \times ا د \times ا د$

وحيث  $\alpha \times \beta \div 2$  كناية عن ضعف مساحة المثلث (قضيه ٦) ينتج من ذلك ان حاصل ضرب الاضلاع الثلاثة من اى مثلث يساوى حاصل ضرب سطح هذا المثلث في ضعف قطر الدائرة المرسومة عليه  
 حاصل ضرب ثلاثة خطوط يسمى في بعض الاحيان جسماً وذلك للدليل يعلم فيما سيأتي ومقداره يتصور بالسهولة عند ما يتوهم تحويل الخطوط الى اعداد وضرب هذه الاعداد في بعضها  
 (تنبيه) يمكن الاثبات أيضاً على ان سطح أى مثلث يساوى حاصل ضرب محيطه في نصف قطر الدائرة المرسومة فيه

لان نصف قطر الدائرة المرسومة في المثلث  
 المفروض  $ab \div 2$  يكون ارتفاعاً مشتركاً بين  
 المثلثات  $am \div 2$  ،  $bm \div 2$  ،  $am \div 2$  المشتركة

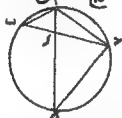


الرأس في  $m$  فعلى ذلك يكون مجموع هذه المثلثات مساوياً لحاصل ضرب مجموع القواعد  
 $ab \div 2$  ،  $bc \div 2$  ،  $ca \div 2$  في نصف النصف قطر  $m$  وبذا يكون سطح المثلث  $ab \div 2$   
 مساوياً لحاصل ضرب محيطه في نصف نصف قطر الدائرة المرسومة فيه

### القضية الخامسة والثلاثون نظريه

اى مثلث مثل  $ab \div 2$  اذا قسمت زاويته  $\gamma$  الى قسمين متساويين بالمسقيم  $1$   
 كان مستطيل الضلعين  $1$  ،  $a$  مساوياً لمستطيل القطعتين  $b$  ،  $c$  ،  $d$  مضافاً  
 ٣٠ م هكذا احد نقيب

اليه مربع المقاطع او



والبرهنة على ذلك يرسم محيط دائرة يمر بالنقط  
التلات ا، ب، د، ويمد او حتى يقابل محيط الدائرة  
ثم يوصل د هـ

فالمثلث ب ا د يكون مشابهاً للمثلث هـ ا د لان الزاوية ب ا د = ا د هـ  
بالفرض وزيادة على ذلك فان الزاوية ب = هـ لان كلاهما تقاس بنصف القوس  
ا د فحينئذ يكون المثلثان المذكوران متشابهين ويحدث بين اضلاعهما المناظرة

$$\text{هذا التناسب} \quad \frac{ب ا}{ا د} = \frac{ا د}{د هـ}$$

ومنه ينتج ان ب ا × ا د = ا د × د هـ

لكن ا د = ا د + د هـ فاذا ضرب الطرفان في ا د يحدث ا د × ا د = ا د × ا د + ا د × د هـ

ومع ذلك فان ا د × ا د = ا د × د هـ + د هـ × د هـ فاذن يكون

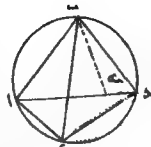
$$ا د × ا د = ا د × ا د + ا د × د هـ + د هـ × د هـ$$

القضية السادسة والثلاثون  
نظريه

في أى شكل رباعي مرسوم في الدائرة مثل ا ب د و مستطيل القطرين ا د و ب و  
يساوى مجموع مستطيل الاضلاع المتقابلة أى انه يحدث

$$ا د × ب و = ا ب × د و + ا د × ب و + د و × ب و$$

(١٤٤)



والله ههنا على ذلك يرسم المستقيم  $د ه$  بحيث تكون  
 الزاوية  $د ه ب$   $=$   $ا ب د$  ويمد هذا المستقيم حتى يتقابل  
 مع  $ا د$  فالزاوية  $ا د ب$  تكون مساوية للزاوية  $د ه ب$   
 لانها مرسومتان في قطعة واحدة  $ا د$  وزيادة على ذلك فان الزاوية  
 $ا ب د = د ه ب$  بالمثل فعلى ذلك يكون للثلث  $ا ب د$  مشابهاً للثلث  
 $د ه ب$  ويحدث هذا التناسب

$\frac{ا ب د}{د ه ب} = \frac{د ه ب}{د ه ب}$  ومنه يحدث  $ا د \times د ه = د ه \times د ه$  (١)  
 لكن المثلث  $ا ب د$  مشابه للثلث  $د ه ب$  لانه من حيث ان الزاويتين  $ا ب د$   
 $د ه ب$  متساويتان فاذا اضيف على كل منهما  $د ه$  يحدث  $ا ب د = د ه ب$   
 وزيادة على ذلك فان الزاوية  $د ا د = د ه د$  لانها مرسومتان في قطعة  
 واحدة فبذا يكون المثلثان  $ا ب د$   $د ه ب$  متشابهين ويحدث بين اضلاعهما  
 المتناظرة هذا التناسب

$\frac{ا ب د}{د ه ب} = \frac{د ه ب}{د ه ب}$  ومنه يحدث  $ا د \times د ه = ا ب \times د ه$  (٢)

فاذا جمعنا للتساويين (١)، (٢) على بعضهما مع ملاحظة كون  $ا ب \times د ه$   
 $د ه \times ا ب = د ه \times (ا ب + د ه) = ا ب \times د ه + د ه \times د ه$  يحدث  
 $ا د \times د ه + د ه \times د ه = ا ب \times د ه + د ه \times د ه$

القضية السابعة والثلاثون  
 نظرية

الشكل الرباعي الذي لا يقبل رسم دائرة عليه يكون مستطيل قطريه اقل من مجموع مستطيلي اضلاعه المتقابلة

وللمبرهنة على ذلك يرسم محيط دائرة يمر بالثلاث نقط  
ا، ب، د وهو محيط لا يمر بالرأس الرابعة و ثم يرسم  
الزاوية ا ب د = د ب د والزاوية ا ب د = د ب د



فالمستقيم ا ب د لا يتجمع ا د لانه من كون النقطة د ليست على المحيط تكون الزاوية د ب د  
غير مساوية للزاوية ا ب د وبعد ذلك يوصل مستقيم بين النقطتين د ب د  
فالمثلثان ا ب د د ب د المتساويان الزاويان بالعل يحدث منها هذا التناسب

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BD}{AD} \text{ ومنه يحدث } AB \times AD = BD^2 \quad (١)$$

اكن المثلثان ا ب د د ب د متشابهان أيضاً لانه اذا طرحت من الزاويتين المتساويتين  
ا ب د د ب د جزءيهما المشتركة د ب د تكون الزاوية ا ب د = د ب د وزيادة  
على ذلك فانه من تشابه المثلثين ا ب د د ب د يحدث هذا التناسب  $\frac{AB}{BD} = \frac{BD}{AD}$   
وحينئذ يكون في المثلثين ا ب د د ب د زاويتان متساويتان محصورتان  
بين اضلاع متناسبة فبذا يكونان متشابهين ويحدث هذا التناسب

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BD}{AD} \text{ ومنه يحدث } AB \times AD = BD^2 \quad (٢)$$

فاذا جمعت المتساويتان (١)، (٢) يحدث

$$BD \times (AB + AD) = AB \times AD + BD^2$$

وحيث ان ا ب د + د ب د اكبر من ا د يكون

(١٤٤)

$$د \times ا > ا \times ب > ا \times د + د \times ا + د \times ب$$

(تنبيه) ينتج مما ذكر انه اذا كان مستطيل قطري أى شكل رباعى مساوياً لمجموع مستطيل  
اضلاعه المتعاقلة فان هذا الشكل يمكن رسمه فى الدائرة

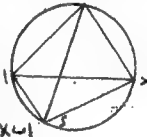
### القضية الثامنة والثلاثون نظريه

النسبة بين قطري أى شكل رباعى مرسوم فى الدائرة كنسبة حاصل جمع مستطيلات  
الاضلاع الرابطة لنهاياتها

وذلك لان الرباعى ا ب د د مستقيم بالقطر ا د

الى المثلثين ا ب د , ا د د فاذا جعل نو رمزاً

لنصف قطر الدائرة المرسومة فى الخارج فانه (قضية ٣٤) يحدث



$$ا ب \times د > ا د \times د = \epsilon \text{ نو } ا ب >$$

$$ا د \times د > ا د \times د = \epsilon \text{ نو } ا د >$$

وبالمجم يحدث احلا (ا ب  $\times$  د + د  $\times$  ا) =  $\epsilon$  نو ا د

ومن كون الرباعى منقسماً الى مثلثين بالقطر د د يحدث أيضاً

$$د (ا ب \times ا + ا \times د + د \times ا) = \epsilon \text{ نو } ا ب د$$

فعل ذلك يحدث

$$ا د (ا ب \times د + د \times ا + ا \times د) = د (ا ب \times ا + ا \times د + د \times ا)$$

$$\frac{ا ب \times د + ا \times د + د \times ا}{ا ب \times ا + ا \times د + د \times ا} = \frac{ا د}{د}$$

احذف

هكبر



## المسئلة الأولى

لتفرض أولاً أن المطلوب تقسيم الخط  $AB$  الخمسة  
أقسام متساوية



لأنه من حيث أن دے مواز المستقیم ج ب يكون الضلعان ا ج ، ا ب  
مقطوعين على التنااسب في دے ( قضیة ۱۶ ) وحيث أن ا د خمس  
ا ج فيكون ا ب خمس ا ج

مثل  $ا$  و يؤخذ  $ا = ج, د = ك, هـ = ر$  ثم يوصل مستقيم بين  $هـ, ب$  ويمد من التقاطعين  $د, ر$  مستقيمان  $د, ر$  ول يوازيان  $هـ, ب$  فبذا يصير المستقيم  $اب$  منقسماً الى اجزاء  $ا, ب, ل$  مناسبة للخطوط المعلومة  $ج, ك, ر$  لانه من توازي المستقيمان  $د, ر$  تكون الاجزاء  $ا, ب, ل$  مناسبة للاجزاء  $ا, د, ر$  (قضيه ١٦) وحيث ان هذه الخطوط الاثيرة مساوية بالعمل للخطوط المعلومة  $ج, ك, ر$  فيكون العمل المذكور موافقاً للطلب

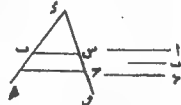
### المسئله الثانيه

المطلوب إيجاد الرابع المتناسب مع ثلاثة خطوط معلومه  $ا, ب, د$

لذلك يمد مستقيمان غير محدودين مثل  $د, هـ$

$د, هـ$  يصنعان بينهما زاوية حيثما انقفت

ويؤخذ على  $د, هـ$  طول  $ا = ب$  وطول  $ب = د$



$ب$  ثم يؤخذ على  $د, هـ$  طول  $د = د$  ويوصل المستقيم  $ا, د$  وبعدها يمد

من  $ب$  مستقيم  $ب, س$  يوازي  $ا, د$  فاجزاء  $د, س$  يكون هو الرابع المتناسب

المطلوب لانه من حيث ان  $ب, س$  يوازي  $ا, د$  يحدث التناسب  $ب, س = د, هـ$  فبحسب

وحيث ان الثلاثة حدود الأثرل من هذا التناسب مساوية للثلاثة خطوط

المعلومة فيكون  $د, س$  هو الرابع المتناسب المطلوب

(نتيجه) يمكن عمل ما ذكر إيجاد الثالث المتناسب مع الخطين المعلومين  $ا, ب$  لان

هذا الثالث المتناسب انما هو الرابع المتناسب للثلاثة خطوط  $ا, ب, د$

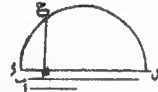
## المسئلة الثالثة

المطلوب إيجاد الوسط المتناسب بين خطين معلومين ارب  
لذلك ثلاث طرق

(الطريقة الاولى) يرسم مستقيم غير محدود مثل د و ويؤخذ عليه طول  
د ه = ا وطول ه و = ب ثم يجعل الخط الكلي

د و قطراً ويرسم عليه النصف محيط دائرة

د و ج و ويقام على هذا القطر من ه العمود ه ج الذي



يتأبل المحيط في ج فهذا العمود يكون هو الوسط المتناسب المبحوث عنه

لأن العمود ج ه المائل من نقطة من المحيط على القطر هو وسط متناسب

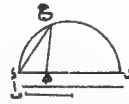
بين الجزئين د ه ه و المنقسم اليهما القطر (قضية ٧، نتيجة) وهذان

الجزآن مساويان للخطين المعلومين ارب

(الطريقة الثانية) يؤخذ د و = ا د ه = ب

ويرسم نصف محيط دائرة بمحيط د و قطراً ويقام

العمود ه ج على د و ويوصل مستقيم بين ج و د



فهذا المستقيم ج د يكون هو الوسط المتناسب بين ارب

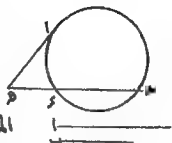
(الطريقة الثالثة) يؤخذ د ه = ا د ه = ب ويرسم محيط دائرة

حيثما التقى

بمربا الفطنتين كرو و يمد من المسقيم

١٥. مما س لهذا المحيط فالخط ١٥ يكون

هو الوسط المناسب بين امر



### المسألة الرابعة

المعلوم زاوية مثل  $\beta$  ونقطة داخلها مثل  $\alpha$  والمطلوب رسم مستقيم

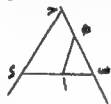
ب. يمر بهذه النقطة ويكون جزأه ا ب، ا د المحصوران بين النقطة ا

وضلعى الزاوية متساويين

لذلك يمد المستقيم  $AB$  الموازي  $CD$  من النقطة

١ ويجعل  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0$  ويوصل المستقيم  $\mathcal{H}_1$

بين النقطتين ب, ا فيكون هو المستقيم المطلوب



لانہ من گوت ۵۱ یوازی دے یحدث  $\frac{1}{5} = \frac{5}{25}$

وحیث ان  $h = 5$  و  $k = 1$  ہوں

## المسئلة - الخامس

للاطلب انشاء مربع يكافئ متنازلي اضلاع معلوماً او مثلثاً معلوماً

(أولاً) لكن اب قاعدة متوازي الاضلاع المعلوم

و هو ارتفاعه من ضلع المربع المحو عنه فيجب

ان یحدث سن = اے لاہ اور ایس =  $\frac{س}{س+۱}$



وعلى ذلك يكون س وسطا متناسبا بين ا ب و د

احمد نجیب

۴۴ م هند

(١٠٩)

ثانياً يشاهد كما تقدم انه ضلع المربع الكافي  
لثالث معلوم يكون وسطاً متناسباً بين  
قاعدة المثلث ونصف ارتفاعه



### المسألة السادسة

المفروض مستقيم مثل  $ا د$  والمطلوب رسم مستطيل  $ا و ه س$  على هذا المستقيم  
يكون مكافئاً للمستطيل معلوم  $ا ب و د$

ليكن  $ا س$  الارتفاع المجهول المخصوص بالمستطيل  
 $ا و ه س$  فن لازم نكافئ المستطيلين نحدث  
المساواة  $ا و ا س = ا ب و د$



ومنها يحدث هذا التناسب  $\frac{ا د}{ا س} = \frac{ا ب}{ا و}$

وعنه يعلم ان الخط  $ا س$  المجهول عنه هو رابع متناسب مع الثلاثة خطوط  
 $ا د$ ،  $ا ب$ ،  $ا و$

### المسألة السابعة

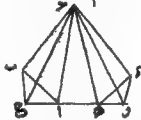
المطلوب إيجاد مستقيمين تكون النسبة بينهما كالنسبة بين سطحي مستطيلين معلومين  
ليكن  $ا ب و د$  بعدى المستطيل الأول و  $د ح و ه$  بعدى المستطيل الثاني فن حيث  
انه يمكن انتخاب احد الخطين المطلوبين على حسب الارادة فنجعله

مساويا للخط ١ وحينئذ إذا جعل س رمزاً للخط الثاني المطلوب فإنه على مقتضى منطوق المسئلة يجب أن يحدث  $\frac{1}{\text{س}} = \frac{1}{\text{س}}$  ومن هذا يحدث  $\text{س} = \frac{1 \times \text{س}}{\text{س}}$  ومن زايرى أن الخط س المصنوع عنه رابع متناسب مع الثلاثة خطوط ب، د، هـ

### المسئلة الثامنة

المطلوب رسم مثلث يكافئ مضلعاً معلوماً

ليكن ا ب د هـ المضلع المعلوم فيبتدأ بترصيل القطر د هـ الذى ينحل به المثلث د هـ و برسم من النقطة د مستقيماً و يوازى د هـ ويمد حتى يماثل امتداد ا هـ ثم يوصل المستقيم د و فالمضلع ا ب د هـ يكون مكافئاً للمضلع ا ب د هـ الاقل منه في عدد الاضلاع بولحد لان المثلثين د هـ د هـ مشتركان في القاعدة د هـ ومتمددان في الارتفاع أيضاً لوجود رأسيهما د و على المستقيم د و الموازى للقاعدة فبذا يكون هذان المثلثان متكافئين وحيث انه بإضافة الشكل ا ب د هـ الى المثلث الأول يحدث المضلع ا ب د هـ فيكون هذان المضلعان متكافئين وبمثل ما ذكر يمكن حذف الزاوية ب باستعواض المثلث ا ب د بمكافئة



ج د و بذا يتحول الخمس ا ب د هـ الى المثلث ج د و المكافئ له  
وهذه الطريقة يمكن تطبيقها على اى مضلع آخر لانه يتقسم عددا الاضلاع  
بواحد في كل دفعة يتوصل الى المثلث المكافئ للشكل  
(تنبيه) قد شوهد فيما تقدم (مسئلة هـ) ان كل مثلث يمكن تحويله الى  
مربع يكافئه فعلى هذا يمكن دائماً ايجاد مربع يكافئ اى مضلع مفروض  
وهذا هو ما يسمى بتربيع الشكل المستقيم الاضلاع  
ومسئلة تربيع الدائرة عبارة عن ايجاد مربع مكافئ لدائرة قطرها معلوم

### المسئلة التاسعة

المطلوب رسم مربع يساوى مجموع أو فرق مربعين معلومين  
ليكن ا ب ضلعى المربعين المعلومين  
فأولاً اذا كان المطلوب ايجاد المربع المساوى لمجموع هذين المربعين بمد مستقيمتين  
غير محدودين مثل د هـ ر هـ و يكون بينهما زاوية قائمة ويؤخذ  
د هـ = ا ب و يوصل د هـ  
فهذا المستقيم يكون هو ضلع المربع المطلوب  
لانه من كون المثلث د هـ ج قائم الزاوية يكون المربع المنشأ على د هـ مساوياً  
لمجموع المربعين المنشأين على د هـ ر هـ و ج هـ  
ثانياً اذا كان المطلوب ايجاد المربع المساوى لفرق المربعين المفروضين نرسم أيضاً  
الزاوية القائمة د هـ هـ و يؤخذ د هـ بقدر اصغر الضلعين ا ب ثم



تجعل النقطة ج مركزاً ويرسم قوس دائرة بنصف قطر ج ط يساوي الضلع الآخر فهذا القوس يقطع ه ط في النقطة ط والمربع المنشأ على ه ط يكون مساوياً لفرق المربعين المنشأين على الخطين ا ب

لان المثلث ج ه ط قائم الزاوية ووتره ج ط = ا وضلعه ج ه = ب فعلى ذلك يكون المربع المنشأ على ه ط هو المربع المطلوب

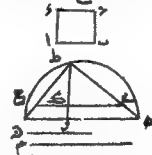
(تنبيه) بما ذكر يمكن إيجاد مربع يساوي مجموع مربعات عددها بقدر ما يراد لان العمل الذي يتحول به مربعات الى مربع واحد يتحول به ثلاثة الى اثنين وهذا الانثان يتحول الى واحد وبذا يصير الثلاث مربعات محولة الى مربع واحد ويكون الامر كما ذكر اذا رجب طرح بعض مربعات من مجموع مربعات اخرى

### المسئلة العاشرة

المطلوب انشاء مربع تكون نسبته الى مربع معلوم مثل ا ب د و كنسبة الخطم الى الخط ه لذلك يرسم خط غير محدود مثل ه ج ويؤخذ ه و = م = ن = د ثم يجعل ه ج قطراً

ويرسم عليه نصف محيط دائرة ويقام عليه العمود و ط من النقطة و ويمد من النقطة ط

الوتران ط ج و ط ه ثم يؤخذ ط ك على الوتر الأول بقدر الضلع ا ب المخصوص بالمربع المعلوم ويمد من النقطة ك مستقيم ك م يوازي ه ج فالمستقيم ط م يكون هو ضلع المربع المطلوب لانه من كون المستقيمين





(144)

کے، ج ۵ متوازیین یحدث

$$\frac{p}{q} = \frac{p}{\frac{p}{\frac{p}{q}}}$$

واذنت بكون

لكن المثلث ه طح القائم الزاوية يحدث منه أيضاً (قضية ١١) ماهرات

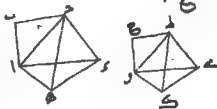
$$\frac{f}{g} = \frac{\frac{20}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{20}{3} \cdot \frac{3}{1}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{1}} = \frac{20}{1} = 20$$

خازن کربن

وحيث ان  $\tau_k = 1$  فتكون نسبة المربع المنشأ على طم الى المربع المنشأ على اسكنية م الى د

### المسئلة الحادية عشر

المطلوب رسم مضلع يشابه مضلعاً معلوماً  $abcd$  على الضلع  $ac$  مع المآخذ  
للضلع  $ab$



لذلك يرسم القطران  $ac$  و  $ad$  في المضلع  
المعلوم ويرسم في النقطة  $e$  زاوية  
 $e$  وط  $ac = b$  وفي النقطة  $e$  زاوية

وع ط = اد فالحظان وط، ع ط يتقاطعان في ط والمثلث وج ط يكون مشابهاً للمثلث اد و بمثل هذا يرسم على وط المناظر للضلع اد مثلث و ط يشابه اد و على و ط المناظر للضلع او ينشأ المثلث و ط ك المشابه اد و فالمضلع وج ط هـ يكون هو المضلع الذي يشابه اد و هـ

لان هذين المضلعين مركبان من عدد واحد من المثلثات المتشابهة شكلاً ووضعاً

### المسئلة الثانية عشر

المعلوم شكلان متشابهان والمطلوب رسم شكل يشابههما بشرط ان يكون  
سماوياً لجزءيهما أو لغيرهما

ليكن  $d$  سطح المضلعين المعلومين ،  $a$  و  $b$  ضلعين متناظرين من  
هذين المضلعين وليكن  $s$  سطح المضلع المجهول عنه ، من الضلع المناظر للضلعين  $a$  و  
 $b$  فن حيث ان نسبة اى ضلعين متشابهين كالنسبة بين مربعى اى ضلعين  
متناظرين من اضلاعهم يحدث

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{d}{s}$$

$$\frac{a^2}{a^2 + b^2} = \frac{d}{d + s} \quad \text{ومن هذا يحدث}$$

$$\frac{a^2}{s} = \frac{d}{d + s} \quad \text{يجدش ايضاً}$$

وحيث ان  $s = d + k$  فيكون التناسبان الاخيران مشتركين في

الثلاثة حدود الأول وبذا يكون  $s = a^2 + b^2$

ومن ذا يشاهد ان  $s$  هو وتر المثلث القائم الزاوية الذى ضلعا قائمته  
هما  $a$  و  $b$

ومتى علم بذلك الضلع  $s$  آت المسئلة الى المثلث المتقدم

واذا لزم ان يكون  $s = d - k$  يحدث ايضاً التناسب

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{d}{k}$$

(١٣٥)

$$\begin{aligned} \text{ومنه يحدث } \frac{3}{5} &= \frac{3}{5} \\ \text{ويحدث أيضاً } \frac{3}{5} &= \frac{3}{5} \\ \text{ومنه يستنتج } \frac{3}{5} &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

### المسألة الثالثة عشر

المطلوب رسم شكل يشابه شكلاً معلوماً ويكون نسبته إلى هذا الشكل كنسبة الكيتين م، د.

ليكن د مسطح الشكل المعلوم، أ أحد أضارعه وليكن ب سطح الشكل المطلوب، ص الضلع المناظر للضلع أ

$$\begin{aligned} \frac{3}{5} &= \frac{3}{5} & \text{فعلى مقتضى منطوق المسألة يحدث} \\ \frac{3}{5} &= \frac{3}{5} & \text{ومن تشابه المضلعين يحدث} \\ \frac{3}{5} &= \frac{3}{5} & \text{ومن هذا يحدث} \end{aligned}$$

ومن ذا يشاهد أنه يحصل على الضلع ص بتطبيق المسألة العاشرة

### المسألة الرابعة عشر

المطلوب رسم شكل يشابه الشكل د ويكون في الشكل ك

ليكن أ ضلعاً من المضلع د، ص الضلع المناظر له من الشكل م المبحوث عنه.

$$\begin{aligned} \frac{3}{5} &= \frac{3}{5} & \text{فن تشابه هذين المضلعين يحدث} \\ \frac{3}{5} &= \frac{3}{5} & \text{وحيث من اللازم مكافئة م، ك يحدث} \\ \frac{3}{5} &= \frac{3}{5} & \text{وإذا بحث عن مربعين م، د، مكافئين للشكلين د، ك يحدث} \end{aligned}$$

(١٣٦)

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

ومن هذا يحدث  
ومن ذاك يرى ان ص رابع متناسب مع الثلاثة خطوط م، د، هـ، ا

### المسئلة الخامسة عشر

المطلوب رسم مستطيل يكافى مربعاً معلوماً > ويكون مجموع ضلعيه المتجاورين مساوياً للطول معلوم ا

لذلك يجعل ا ب قطراً ويرسم عليه نصف محيط دائرة ويمد المستقيم هـ و موازياً للقطر بحيث يكون على بعد ا و يساوى ضلع المربع المعلوم > ومن النقطة هـ التي تقاطع فيها هذا الموزاى مع محيط الدائرة ينزل العمود هـ و على القطر فالخطان ا و ر و ب يكونان هما ضلع المستطيل المطلوب عنه



لأن مجموعهما يساوى ا ب ومستطيلهما ا ر و ب يساوى مربع هـ و أو مربع ا و وبذا يكون المستطيل المذكور مكافئاً للمربع المعلوم > (تنبيه) لئلاجل ان تكون المسئلة ممكنة لحل يلزم ان لا يكون البعد ا و اكبر من نصف القطر اى يلزم ان لا يكون ضلع المربع > اكبر من نصف المحيط ا ب

### المسئلة السادسة عشر

المطلوب رسم مستطيل يكافى مربعاً معلوماً > ويكون فرق ضلعيه المتجاورين مساوياً للطول معلوم ا

(١٣٧)



لذلك يجعل الخط المعلوم  $اب$  قطراً ويرسم  
 عليه محيط دائرة ومن نهاية القطر يمد  
 المماس  $ا$  بطول يساوى ضلع المربع  $د$   
 ويوصل القاطع  $هـ$  بين  $و$  والمركز  $م$  فالمستقيمان  $هـو$  و  $و$  يكونان  
 هما الضلعان المتجاوران من المستطيل المطلوب  
 وذلك لان فرق هذين الضلعين يساوى القطر  $هـو$  و  $ا$  و  $اب$  وان المستطيل  
 $ا هـ و$  يساوى  $ا$  فبذا يكون المستطيل مكافئاً للمربع المعلوم  $د$

### المسألة السابعة عشر

المطلوب تقسيم المستقيم  $اب$  الى نسبة ذات وسط وطرفين اى المطلوب  
 تقسيم المستقيم المذكور الى جزئين بحيث يكونه أكبرها وسطاً متناسباً بين المستقيم  
 الكلى والجزء الآخر

لذلك يقام العمود  $د$  على  $اب$  من النهاية  
 $ب$  ويتخذ عليه طول يساوى نصف  $اب$   
 وتجعل النقطة  $د$  مركزاً ويرسم محيط دائرة



بنصف قطر يساوى  $د$  ويوصل المستقيم  $ا$  الذى يقابل المحيط فى  $و$   
 ثم يؤخذ  $ا$  و  $ا$  فالمستقيم  $اب$  يكون منقسماً فى النقطة  $و$   
 على الوجه المذكور فى منطق المسألة

وذلك لانه اذا امتد  $ا$  حتى يقابل المحيط مرة ثانية فى  $هـ$  فن حينئذ

(14π)

ان اب ماس يحدش هذا التماس

$$\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

أو  $\frac{a-b}{a} = \frac{a-b}{a}$

وہیث ان اب = ۵۳ پکونہ ۵۱ - اب = ۵۱ = ۵۱ او ویکونہ

$a = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{2}$

ومن ذلك يحدث هذا التناوب  $\frac{1}{11} = \frac{1}{12}$

(تنبیہ) لیکن  $ab = m$  فیصلت  $a = a = a - d - d$

رحیث ان  $\sqrt{25+9} = \sqrt{34+1} = 6$

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

وان  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$$(1 - 0.7) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 0.7 \times \frac{1}{2} = 0.15$$



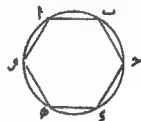
(١٣٩)

## المقالة الرابعة في المضلعات المنتظمة وفي مساحة الدائرة

### تعريف

المضلع الذي اضلاعه متساوية وزواياه متساوية يسمى مضلعاً منتظماً وتوجد مضلعات منتظمة بأي عدد من الاضلاع

لأننا اذا توهمنا تقسيم محيط دائرة الى  
اقسام متساوية عددها م ووصلت  
مستقيمات بين نقط التقسيم المتعاقبة وهي



ا ب د هـ ز ح ..... بح تكون من ذلك مضلع عدد اضلاعه م وهذا المضلع  
تكون اضلاعه كلها متساوية لانها موزعة لاقواس متساوية وزواياه وهي  
ا ب د هـ ز ح ..... بح تكون كلها متساوية لانها مرسومة في اجزاء متساوية  
من محيط الدائرة

والمثلث المتساوي الاضلاع انما هو مضلع منتظم اضلاعه ثلاثة والمربع هو مضلع  
منتظم اضلاعه اربعة

### القضية الأولى

#### نظريه

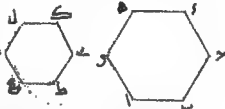
المضلعان المنتظمان المتساويان في عدد الاضلاع يكونان متشابهين

لأنه إذا كانت  $ا ب د ه و ز$  مع طية كل م مسدسين منتظمين

مثلاً كان مجموع زوايا المضلع الأول مساوياً

لمجموع زوايا المضلع الثاني وكان كل من هذين

المجموعين مساوياً لثمان زوايا قائمة



والزاوية  $ا$  تكون مساوية لستة هذا المقدار وكذا الزاوية  $ح$  وبذا تكونت

الزاويتان  $ا ب ج$  متساويتين ويكون الامر كذلك بالنسبة للزاويتين  $ب ج د$  ،  $ج د ه$  ،

وبالنسبة للزاويتين  $د ه و$  ،  $ه و ز$  وهكذا .

وزيادة على ذلك من حيث انه من طبيعة المضلعين المذكورين تكون الاضلاع

$ا ب$  ،  $ب ج$  ،  $ج د$  ، .....  $ز ح$  كلها متساوية وكذا الاضلاع  $ح ط$  ،  $ط ق$  ،  $ق ك$  ،

.....  $م ن$  فمن الواضح انه يحدث هذا التناسب .

$$\frac{ا ب}{ح ط} = \frac{ب ج}{ط ق} = \frac{ج د}{ق ك} = \frac{د ه}{ك ل} = \frac{ه و}{ل م} = \frac{و ز}{م ن}$$

فعلى ذلك تكون الزوايا المتناظرة في المضلعين المذكورين متساوية وتكون

اضلاعها المتناظرة متناسبة وبذا يكونان متشابهين

(نتيجة) نسبة محيطي المضلعين المنتظمين المتساويين في عدد الاضلاع كالنسبة

بين اى ضلعين متناظرين من اضلاعها والنسبة بين سطحيهما كالنسبة بين

مربعي هذين الضلعين

(تنبيه) زاوية المضلع المنتظم تعين بعدد اضلعه كزاوية المضلع

المتساوي الزوايا



## القضية الثانية

نظريه

كل مضلع منتظم يمكن رسمه في دائرة ويمكن رسم دائرة فيه

ليكن  $ا ب د ه$  مع  $ط$  المضلع الجارى اعتبار  
ولنفرضهم مرور بحيط دائرة بالثلاث نقط  $ا ب$   
 $د ه$  وليكن  $م$  مركز هذا المحيط  $م$  مع المركز



الانزل على منتصف المضلع  $ب د$  ونصل  $ا م$   $م د$

فالشكل الرباعي  $م ع د ب$  يمكن انطباقه على الشكل الرباعي  $م ع ا د$  لانه من  
كون المضلع  $م ع$  مشترك بينهما والزاوية  $م ع د = م ع ا$  بالقيام  
ينطبق المضلع  $ع د$  على مساريه  $ع ا$  وتقع النقطة  $د$  في  $ا$  وحيث انه  
الزاوية  $ع د ب = ع ا د$  من طبيعة المضلع فان  $د$  يأخذ اتجاه  $ا$   
وحيث ان  $د ب = ا د$  تقع النقطة  $د$  في  $ا$  وبذا يتخذ الشكلان  
الرباعيان مع بعضهما بالكلية وعلى هذا يكون البعد  $م د = م ا$  ومن ذا  
يشاهد ان محيط الدائرة المار بالثلاث نقط  $ا ب د ه$  يمر بالنقطة  $م$  ايضاً  
وحيث انه يمكن البرهنة بالدليل عينه على ان محيط الدائرة الذي يمر بالرؤس  
الثلاثة  $ب د ه$  يمر بالرأس  $ا$  التالية لها وهم جوا فيعلم من ذلك  
ان محيط الدائرة عينه المار بالنقط  $ا ب د ه$  يمر بجميع رؤس المضلع  
وبذا يكون المضلع مرسوماً في محيط الدائرة المذكور

واما من خصوص الأمر الثاني فانما كانت جميع الاضلاع  $ا، ب، ج، د، هـ، ز، ح، ط، ي$  متساوية كانت ابعادها عن المركز متساوية (قضية ٨ مقالة ٣) وعلى ذلك اذا جعلت النقطة  $م$  مركزا ورسم محيط دائرة بالنصف قطر  $م ع$  فهذا المحيط يسمى المضلع  $ح د$  وجميع الاضلاع الاخرى من المضلع ويكون التماس في منتصف كل منها وبذا يصير محيط الدائرة مرسومًا في المضلع أو المضلع مرسومًا على محيط الدائرة (تنبيه ١) النقطة  $م$  التي هي مركز مشترك بين الدائرة المرسومة في الداخل والدائرة المرسومة في الخارج يمكن اعتبارها مركزا للمضلع ايضا ولم هذا الداعي تسمى الزاوية  $ا م ب$  المتكونة من النصف قطر بين المتدين الى نهايتي ضلع واحد مثل  $ا ب$  بالزاوية المركزية

وحيث ان جميع الاوتار  $ا ب، ب ج، ج د، د هـ، هـ ز، ز ح، ح ط، ط ي، ي ا$  متساوية فمن الواضح ان جميع الزوايا المركزية متساوية وانه يتحصل على مقدار كل منها بقسمة اربع زوايا قائمة على عدد اضلاع المضلع

(تنبيه ٢) رسم اى مضلع منتظم في محيط دائرة معلوم لا يستدعي الانقسام هذا المحيط الى اقسام متساوية عددها بقدر عدد اضلاع المضلع (تنبيه ٣) اذا رسم في قوس ما جملة أو ثانياً متساوية فالشكل الحادث يسمى جزءاً من مضلع منتظم أو خطاً منكسراً منتظماً وهو الأرفق وهذا الجزء تصدق عليه الخواص الاساسية للمضلعات المنتظمة أي ان زواياه تكون متساوية ويمكن رسمه في دائرة ويمكن رسم دائرة عليه ومع ذلك فانه لا يكون جزءاً حقيقياً

(١٤٣)

من مضلع منتظم أصلى إلا إذا كان القوس العرش يا حذاضاً له جزءاً متداخلاً  
في محيط الدائرة المرسوم هو فيها

### القضية الثالثة

#### مسألة

المطلوب رسم مربع في محيط دائرة معلوم

لذلك يجد قطران مثل  $ا د$  و  $ب ك$  يكوان  
متقاطعين على زوايا قائمة وتوصل مستقيمات  
بين النهايات  $ا ب$  ،  $ب د$  ،  $د ك$  ،  $ك ا$  فالشكل  $ا ب د ك$



يكون مربعاً مرسوماً في الدائرة

لأنه من كون الزوايا  $ا م ب$  ،  $ب م د$  ،  $د م ك$  ،  $ك م ا$  متساوية تكون الأوتار  $ا ب$  ،  $ب د$  ،  $د ك$  ،  $ك ا$  متساوية

(تنبه) من حيث أن المثلث  $ب م د$  قائم الزاوية وعشاري الساقين  
فانه على مقتضى (قضية ١١ مقالة ٣) يحدث هذا التناسب

$$\frac{ب م}{د م} = \frac{د ك}{م ا}$$

ومن ذا يعلم أن نسبة ضلع المربع المرسوم في الدائرة إلى نصف القطر كنسبة  
الجذر التربيعي للعدد ٢ إلى الواحد

(١٤٤)

# القضية الرابعة مسئلة

المطلوب رسم سدس منتظم ومثلث متساوي الاضلاع في محيط دائرة معلوم  
لذلك يفرض ان المسئلة محلولة وان  $ا ب$  ضلع من اضلاع السدس المطلوب  
فاذا وصل النصف قطرين  $ا م$  ,  $ب م$  كان



المثلث  $ا م ب$  متساوي الاضلاع  
لان الزاوية  $ا م ب$  سدس اربع زوايا قائمة فانا  
جعلت الزاوية القائمة وحده تكون  $ا م ب = ٦٠$

$= ٦٠$  والزاويتان الاخرتان  $ا م ب$  ,  $ب م ا$  من المثلث عينه يكون مجموعهما  
مساويا  $= ١٢٠$  أي  $٦٠$  وحيث انهما متساويتان تكون كل منهما مساوية  $٦٠$   
وحيث يكون المثلث  $ا ب م$  متساوي الاضلاع وبناء عليه يكون ضلع السدس  
المرسوم في الدائرة مساويا لنصف القطر

ومن هنا يتبع انه لرسم سدس منتظم في محيط دائرة معلوم يلزم نقل نصف  
القطر على محيط الدائرة ست مرات وبهذا يصير الرجوع الى النقطة التي صار  
الابتداء منها

ومن بعد رسم السدس  $ا ب ج د ه و$  في الدائرة اذا وصل مستقيم بين كل  
رأسين متقابلتين برأس واحد حدث المثلث  $ا ب ج$  المتساوي الاضلاع  
(تنبيه) الشكل  $ا ب ج د ه و$  متوازي الاضلاع بل هو معين لان  $ا ب = ب ج = ج د = د ه = ه و = و ا$

مربع

هكذا

م

٣٦

فبذا يكون (قضبة ١٥ مقال ٢) مجموع مربعي القطرين وهو  $س\text{م} + س\text{م}$   
 مساوياً لمجموع مربعات اضلاعه الذي هو  $ا\text{م} + ا\text{م}$  أو  $س\text{م}$  وإذا طرح  $س\text{م}$   
 من الطرفين بقي  $ا\text{م} = س\text{م}$  واذن يكون

$$\frac{ا\text{م}}{س\text{م}} = \frac{س\text{م}}{س\text{م}} \text{ أو } \frac{ا\text{م}}{س\text{م}} = \frac{س\text{م}}{س\text{م}}$$

ومن ذا يعلم ان نسبة ضلع المثلث المتساوي الاضلاع المرسوم في الدائرة الى نصف  
 القطر كنسبة الجذر التربيعي للعدد ٢ الى الواحد

### القضية الخامسة

مسئله

المطلوب رسم معشر منتظم في الدائرة

لذلك يفرض ان المسئلة محله وان  $ا ب$   
 ضلع من اضلاع المعشر المطلوب فالزاوية المركزية  
 $ا م ب$  تكون مساوية لـ  $ا ب$  أي  $ا ب$  وعلى



ذلك يكون مجموع الزاويتين  $م ب ا$ ،  $م ا د$  مساوياً لـ  $ا ب$  أي  $ا ب$  واذن  
 تكون كل منهما مساوية لـ  $ا ب$

واذا مد المستقيم  $ب هـ$  المنصف للزاوية  $م ب ا$  فان المثلث  $هـ م ب$   
 يكون متساوي الساقين لان كلا من الزاويتين  $هـ م ب$ ،  $م ب هـ$  تساوي  
 $ا ب$  فاذن يكون  $م هـ = م ب$  ويكون المثلث  $هـ ا د$  متساوي الساقين  
 أيضاً لانه من كون الزاوية  $هـ ا ب$  مساوية لـ  $ا ب$  والزاوية  $هـ ا د$  مساوية

(١٤٦)

يكون الزاوية  $\alpha$  مساوية  $\frac{1}{2}$  وعلى هذا يكون

$$a = b = c$$

ثم انه على مفتحي (قضية ١٨ مقال ٢) يحدث

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{a}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

أو

ومن ذا يشاهد ان النصف قطر  $a$  منقسم في النقطة  $b$  الى نسبة ذات وسط وطرفين وان النقطة الكبرى  $c$  تساوي ضلع المعشر المرسوم في الدائرة

(نتيجة ١) اذا وصل مستقيم بين كل رأسين متفاوتتين برأس واحدة من رؤس المعشر المنتظم حدث الخمس المنتظم  $a, b, c$

(نتيجة ٢) اذا كان  $a$  ضلع المعشر وكان

ال ضلع المسدس فان القوس  $a$  يكون

بالنسبة لمحيط الدائرة  $\frac{1}{6}$  أي  $\frac{1}{6}$  وعلى

ذلك يكون القوس  $a$  ضلعاً لذي الخمسة عشر ضلعاً المنتظم ويشاهد في آن

واحدان القوس  $a$  ثلث  $a$

(نتيجة ٣) ضلع المعشر المرسوم في الدائرة التي نصف قطرها  $a$  يساوي

هذا المقدار  $(\sqrt{1-\frac{5}{4}})$

(نتيجة ٤) متى رسم المضلع المنتظم في الدائرة وقسم كل من الاقواس المرسومة



باضلاعه الى قسمين متساويين ومعدت الاوتار الموترة لانصاف هذه الاقواس  
حدث من هذه الاوتار مضلع منتظم عدد اضلاعه ضعف عدد اضلاع المضلع  
الاول ومن ذا يشاهد ان المربع يمكن استعماله في رسم المضلعات المنتظمة  
التي عدد اضلاعها على التعاقب ٨، ١٦، ٣٢، ٦٤... الخ وان المسدس المنتظم  
يستعمل في رسم المضلعات المنتظمة التي عدد اضلاعها على التعاقب ١٢، ٢٤، ٤٨، ٩٦... الخ  
وان العشر يستعمل للاشكال التي اضلاعها ٢٠، ٤٠، ٨٠، ١٦٠... الخ وذو الخمسة عشر  
ضلعا في الاشكال التي اضلاعها ٣٠، ٦٠، ١٢٠، ٢٤٠... الخ

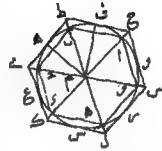
لقد اعتقد مدق طريقة من الزمن في ان هذه الاشكال هي التي يمكن رسمها  
دون غيرها في الدائرة بطرق الهندسة العادية أو بمثل معادلات الدرجة الاولى  
والثانية وهو امر يرجع الى الاول لكن المعلم غوص قد برهن في كتابه المشتمل  
من الهلاد على انه يمكن بمثل هذه الطرق رسم المضلع المنتظم الذي عدد اضلاعه ١٧  
وعلى العموم المضلع المنتظم الذي عدد اضلاعه ٢٢ حالة ما يكون  
٢٢ عددًا أوليًا

## القضية السادسة

### مسألة

المعلوم مضلع منتظم مرسوم في محيط الدائرة مثل ا ب ج د... الخ والمطلوب  
رسم مضلع منتظم على محيط الدائرة عينه يكون مشابهًا للاول

(١٤٨)



لذلك يعد المحاس ج ط من النقطة ق التي  
هي منتصف القوس اب لهذا المحاس يكون  
موازيًا اب (قضية ١٠ مقالة ٤) ثم يجرى  
العمل كذلك في منتصف كل من الأقواس الأخرى ب د ر د ر... في هذه المحاس  
بتقاطعها يحدث منها المضلع المتكامل ج ط م ك... في المرسوم خارج الدائرة  
الذي يشابه المضلع المرسوم في الدائرة

اذن الواضح ان الا ان الثلاث نقط م ر ط على مستقيم واحد لان الثلاثين  
م ف ط م ط ه مشتركان في الوتر م ط وفيهما المضلع م ف م ه وبذا  
يكونان متساويين (قضية ١٩ مقالة ١) ومن تساويهما تكون الزاوية ف م ط  
= ط م ه ومن ذا يعلم ان المخط م ط يمر بالنقطة ب التي هي منتصف القوس  
ف ه وبمثل هذا يشاهد ان النقطة م على امتداد م د وهكذا لكن حيث  
ان ج ط يوازي اب وان ط م يوازي ب د فتكون الزاوية ج ط م = اب د  
وكذلك الزاوية ط م ك = ب د ر وهكذا وبذا تكون زوايا المضلع المرسوم  
على الدائرة مساوية لزوايا المضلع المرسوم فيها وزيادته على ذلك فانه بسبب  
المستقيمات المتوازية المذكورة يحدث

$$\frac{ج ط}{اب} = \frac{ط م}{ب د}, \frac{ط م}{ب د} = \frac{ط م}{ب د}$$

$$\frac{ط م}{ب د} = \frac{ط م}{ب د}$$

واذن يكون

لكن حيث ان اب = ب د يكون ج ط = ط م وبمثل هذا يعلم ان ط م = م ك وكذا



فعلى ذلك تكون اضلاع المضلع المرسوم على الدائرة متساوية وبذا يكون منتظما شابهها  
للمضلع الداخل

(نتيجة ١) وبالعكس اذا كان المعلوم المضلع ج ط هـ ك .... في المرسوم على الدائرة  
وكان الامر لازما لجعله واسطة في رسم المضلع ا ب د .... في داخل الدائرة يكفى  
في ذلك ان تمد الخطوط م ج ، م ط ، ... في الى رؤس المضلع المعلوم وهي ج ، ط ، ر ...  
هذه الخطوط تقطع محيط الدائرة في النقطة ا ، ب ، د ، ر .... في واذا وصلت  
الاورتار ا ب ، ب د ، د ر ، ... في تكون منها المضلع الداخل المطلوب ويمكن ايضا في هذه الحالة  
توصيل الاورتار ف د ، د ر ، ر ع ، ... في بين نقط التماس ف ، د ، ر ، ع ، ... في فيصـلث  
من هذه الاورتار مضلع مرسوم في الدائرة مشابه ايضا للمضلع المرسوم عليها  
(نتيجة ٢) بالبناء على ما ذكر يمكن ان يرسم على دائرة مفروضة جميع المضلعات  
المنتظمة المعلوم طرق رسمها في الدائرة وعكسا

### الفصل السابعة

#### نظريه

مساحة المضلع المنتظم تساوى حاصل ضرب محيطه في نصف قطر الدائرة المرسومة فيه  
ليكن ج ط هـ ك .... في مضلعا منتظما فمساحة  
المثلث ج م ط تساوى ج ط  $\times$   $\frac{1}{2}$  م ف ومساحة  
المثلث م ط هـ تساوى ط هـ  $\times$   $\frac{1}{2}$  م د وحيث  
كان م د = م ف تكون المثلثين معا تساوى (ج ط + ط هـ)  $\times$   $\frac{1}{2}$  م ف

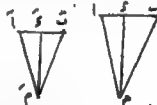


وبالاستقرار على هذا المنوال بالنسبة للمثلثات الأخرى يشاهد أن مساحة مجموع المثلثات كلها أى مساحة المضلع بتمامه تساوى حاصل ضرب مجموع القواعد  $ط, ط, ط, ط, ط$  على  $ك$ ، أى محيط المضلع فى  $\frac{1}{2} م$  أى فى نصف نصف قطر الدائرة المرسومة فى المضلع (تنبيه) النصف قطر  $م$  الخاص بالدايرة المرسومة فى المضلع إنما هو العمود المنزل من المركز على أحد الأضلاع يسمى أحياناً بارتفاع المضلع المذكور

### القضية الثامنة نظريه

النسبة بين محيطي المضلعين المنتظمين المتساويين فى عدد الأضلاع كالنسبة بين نصفى قطري الدائرتين المرسومين عليهما كالنسبة بين نصفى قطري الدائرتين المرسومين فيهما أيضاً والنسبة بين سطحيهما كالنسبة بين مربعى نصفى القطرين المذكورين

ليكن  $ا ب$  ضلعاً من أحد المضلعين الخارجين  
اعتبارهما  $م$  مركزه  $م$  نصف قطر الدائرة  
المرسومة عليه  $م$  نصف قطر الدائرة المرسومة  
فيه وليكن  $ا ب$  ضلع المضلع الآخر المشابه له  $م$  مركزه  $م$  نصف قطر الدائرة  
المرسومة عليه  $م$  نصف قطر الدائرة المرسومة فيه



فالنسبة بين محيطي هذين المضلعين كالنسبة بين الضلعين  $ا ب$ ،  $ا ب$  لكن بحيث  
أن الزاويتين  $ا$ ،  $ا$  متساويتان بما أن كل منهما نصف زاوية المضلع وأن الأضلاع  
بالنسبة للزاويتين  $ب$ ،  $ب$  فيكون المثلثان  $ا ب م$ ،  $ا ب م$  متشابهين وكذلك

المثلثان  $ا د م$  ,  $ا ك م$  واذن يحدث

$$\frac{ا م}{ا د} = \frac{ا م}{ا ك} = \frac{ا د}{ا ك}$$

وعلى ذلك تكون النسبة بين محيطي المضلعين كالنسبة بين نصفى قطرى الدائرتين المرسومتين عليهما وهما  $ا م$  ,  $ا ك$  . والنسبة بين نصفى قطرى الدائرتين المرسومتين فيهما وهما  $م د$  ,  $م ك$

وحيث ان نسبة سطحى المضلعين المذكورين كنسبة مربعى الضلعين المتناظرين  $ا د$  ,  $ا ك$  فتكون نسبة هذين السطحين ايضا كنسبة مربعى نصفى قطرى الدائرتين المرسومتين على المضلعين وهما  $ا م$  ,  $ا ك$  . وكنسبة مربعى نصفى قطرى الدائرتين المرسومتين فى المضلعين وهما  $م د$  ,  $م ك$

### تعريف

- (١) الكمية المتغيرة هي كمية تأخذ مقادير مختلفة متعاقبة
- (٢) النهاية مقدار ثابت تقرب منه كمية متغيرة على قدر ما يزداد يزداد تقل اليه
- (٣) علم الحساب وهو علم الهندسة فيهما امثلة عديدة من الكميات المتغيرة ومن النهايات التى تقرب منها هذه المتغيرات

فمن المعلوم مثلا ان مقدار زاوية من سطح مستقيم عدد اضلاعه  $n$  هو

$$\frac{4 - 3n}{2} = 4 - 3n - \frac{4}{2}$$

فاذا فرض ان عدد الاضلاع يزداد الى ما لا نهاية له شوهد ان مقدار الزاوية يزداد أيضا

وحيث انه يمكن جعل  $m$  كبيراً بالكفاية بحيث ان الكسر  $\frac{m}{n}$  يصير أصغر من كل  
كمية مفروضة فيستنتج من ذلك ان المقادير المتعاقبة لزاوية المضلع المنتظم  
نهايتها قايمة

وأيضاً اذا انصف مستقيم مثل  $ab$  بالنقطة  $c$  ثم نصف المستقيم  $cb$  بالنقطة  $d$   
وهكذا فان نهاية الخطوط  $ad, dc, cd, d, \dots$  هي الخط  $ab$

ويمكن ضرب أمثال على ذلك بالانهاية

(٤) من البديهي انه اذا كانت نهايات العوامل  $a, b, c, \dots$  المخصوصة بمحصل ضرب

هي  $a, b, c, \dots$  فان نهاية الحاصل  $a \times b \times c \times \dots$  تكون  $a \times b \times c \times \dots$

(٥) ليكن  $a, b, c, \dots$  مضلعاً مرسوماً في دائرة فمحيط هذا المضلع يكون أصغر من طول

محيط الدائرة لان كل ضلع أصغر من القوس المقابل

له فاذا اخذ على الأقواس  $a, b, c, \dots$  نجح

نقط تقسيم مثل  $d, e, f, \dots$  ووصلت الأوتار



$a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, \dots$  حدث مضلع ثان مرسوم في الدائرة محيطه أكبر من محيط الأول

واذا اخذت نقط تقسيم اخرى متوسطة بحدث مضلع ثالث محيطه أكبر من محيط الثاني

وهلم جرا وبذا تأخذ محيطات هذه المضلعات في القرب من طول محيط الدائرة ومن هنا

تؤخذ القضية الاتية التي تعتبرها من الامور البديهية وهي انه اذا كان عدد

اضلاع المضلع كبيراً بالكفاية فان الفرق بين طول محيط الدائرة ومحيط المضلع يكون

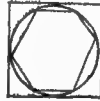
أقل من أي كمية مفروضة وهذا يعبر عنه بالعبارة الآتية وهي  
 أن طول محيط الدائرة هو النهاية التي يقرب منها محيط مضلع مرسوم فيه عدد أضلاعه  
 يزداد من غير حد

ويشاهد أيضاً أن سطح المضلعات المتعاقبة التي كل منها أقل من سطح الدائرة تغترق  
 من هذا السطح قليلاً قليلاً وبالسليم فيكون الفرق يمكنه أن يصير أصغر من كل مقدار  
 مفروض يستنتج الأمر الثاني وهو

أن مساحة الدائرة هي النهاية التي يقرب منها مساحة مضلع مرسوم في الدائرة عدد  
 أضلاعه يزداد من غير حد

(٦) ينتج بذهاه مما ذكرنا أن كل خاصية تصدق على محيط أو على سطح مضلع مرسوم  
 في الدائرة مهما كان عدد أضلاعه يمكن تطبيقها على طول محيط هذه الدائرة أو على سطحها  
 مثال ذلك أنه من كون محيط أي مضلع مرسوم في

الدائرة أصغر من محيط أي مضلع آخر أحاطه محيط هذه  
 الدائرة يستنتج أن طول محيط الدائرة نفسه أصغر



من محيط أي مضلع يحيط به

ومتي رسم في دائرة مضلعات متتالية عدداً أضلاعها آخذ في التزايد فإن النصف أقطار

الدوائر المرسومة في هذه المضلعات آخذ في التزايد لأن  
 الأطوال المطلقة تصبح صغيرة زيادة فزيادة وبذلك آخذ في  
 التباعده عن المركز وزيادة على ذلك فإن نهاية الانصاف



أقطار المذكورة هي نصف قطر الدائرة المرسومة على المضلعات المذكورة  
وذلك لأنه إذا كان  $a$  أحد اضلاع المضلع المنتظم المرسوم في الدائرة وكان  $m \geq$   
نصف قطر الدائرة المرسومة فيه ،  $m$  نصف قطر الدائرة المرسومة عليه فإنه  
من الثالث  $m \leq d$  يحدث  $m - m \geq d - d$   
وبحيث أن  $d$  الذي هو نصف  $a$  يمكنه أن يصير صغيراً على قدر ما يراد  
فن باب أولى يمكن أن  $m - m \geq d - d$  يصير أصغر من كل كمية مفروضة

## القضية الخامسة

نظریہ

النسبة بين محيطي أى دائرتين كالنسبة بين نصفى قطريهما والنسبة بين سطحى الدائرتين كالنسبة بين مربعى نصفى قطريهما

برهان الأمر الأول أن يرسم في محيط الدائرتين  
الذي نصف قطرهما  $OB$  و  $OA$  مضعفات  
متثلان متشابهان



ولكن ج ج يحيطي هذين المضلعين وأنجعل نو نو رمزين للنصفين قطريين  
و ب ١٢ ثم نجعل م م رمزين للحيطي الدائريتين المرسومتين عليهما فعلى  
مقتضى القضية الثامنة يحدث

$$\frac{2\pi}{2\pi} = \frac{5}{5}$$

مرحيث ان هذا التناسب صحيح مما كان عدد اخلاص المضلعين فانه يمكن تطبيقه

أيضاً على طول محيط الدائرتين وحينئذ يحدث

$$\frac{م}{ن} = \frac{ل}{و} \quad (١)$$

وبهذه الأمر الثاني أن يجعل  $د$  رمزاً لسطح الدائرتين المذكورتين  $ر$   $س$   
 $ر$   $س$  رمزاً لسطح المضلعين المتشابهين المتشابهين المرسومين فيهما فعلى مقتضى  
 القضية الثامنة يحدث

$$\frac{س}{ر} = \frac{ل}{و}$$

وحيث أن هذا تناسب صحيح مهما كان عدد اضلاع المضلعين فإنه يحدث

$$\frac{م}{ن} = \frac{ل}{و}$$

(تنبيه) من المتساوية (١) يستخرج أيضاً

$$\frac{م}{ل} = \frac{ن}{و}$$

ومن ذا يعلم أن نسبة محيط الدائرة لقطرها ثابت بالنسبة لجميع محيطات  
 الدوائر وهذه النسبة التي يرمز لها في العادة بحرف  $ط$  هي أصمة لا يمكن حسابها  
 إلا بدرجة التقريب ومقاديرها بالاعشارى هو

$$ط = \frac{٣}{١٤} = ٣,١٤١٥٩٢٦٥٣٥٨٩٧٩٣٤$$

وعما قريب نأتى بطريقة ابتدائية لحساب مقدار  $ط$  بوجه التقريب  
 ومعرفة العدد  $ط$  نرؤن بتقدير طول محيط الدائرة المعلوم نصف قطره  
 لانه من المتساوية  $\frac{م}{ل} = \frac{ن}{و}$   $ط = \frac{م}{ل}$  يستخرج  $م = ط \times ل$

(مثال ذلك) ليكن  $ن = ٣,١٨$  فاذا اخصص المقدار التقريبي  $٣,١٤$

للقسبة ط يحدث

$$315/4480 = 18,3043,144 \times 4 = م$$

تعريف

الاقواس المتشابهة والقطاعات المتشابهة والقطع المتشابهة ما كانت مقابلة لزاويا  
مركزية متساوية

القسبة العاشرة

نظريه

النسبة بين القوسين المتشابهين ا ب و د كالنسبة بين النصفين قطرين ا د  
و د والنسبة بين القطاعين المتشابهين ب د ا ب كالنسبة بين مربعي  
النصفين قطرين المذكورين

اما الأمر الأول فهو لانه على مقتضى (قضية ١٨)

مقاله ٤ يحدث

$$\frac{قوس ا ب}{محيط د ب} = \frac{قوس ا ب}{محيط ا د}$$



$$\frac{قوس ا ب}{محيط د ب} = \frac{قوس ا ب}{محيط ا د}$$

فبسبب تساوي الزاويتين د و د يحدث

$$\frac{قوس ا ب}{محيط د ب} = \frac{قوس ا ب}{محيط ا د} = \frac{قوس ا ب}{محيط د ب}$$

واما الأمر الثاني فهو لانه على مقتضى (قضية ١٨ مقاله ٤) ايضا يحدث

$$\frac{قوس ا ب}{محيط د ب} = \frac{قوس ا ب}{محيط ا د} = \frac{قوس ا ب}{محيط د ب}$$

اعد نجيب

هنا

٣٩ م



(١٥٧)

فن هذا يحدث

$$\frac{\text{قطر } \alpha \beta}{\text{قطر } \alpha \gamma} = \frac{\text{دائرة } \alpha \delta}{\text{دائرة } \alpha \gamma} = \frac{\text{قطر } \alpha \delta}{\text{قطر } \alpha \gamma}$$

القضية الحادية عشر

نظريه

مساحة الدائرة تساوى حاصل ضرب محيطها في نصف نصف قطرها

لانه اذا رسم في الدائرة التي نصف قطرها  $\alpha$   
مضلعاً منتظماً وجعل  $\gamma$  رمزاً لمحيط هذا المضلع  
س رمزاً لسطحها يحدث



$$س = \gamma \times \frac{\alpha}{2}$$

وحيث ان مساحة الدائرة نهاية لمساحات المضلعات المنتظمة المرسومة فيها التي  
عدد اضلاعها يأخذ في التزايد من غير حد فانه يستحصل على مساحة الدائرة بالبحث  
عن النهاية التي يقرب منها الحاصل  $\gamma \times \frac{\alpha}{2}$  و  $\gamma$  وحيث ان نهاية  $\gamma$  هي  
محيط  $\alpha$  وان نهاية  $\alpha$  هي  $\alpha$  فيحدث

$$\text{سطح الدائرة } \alpha = \text{محيط } \alpha \times \frac{\alpha}{2}$$

(تنبيه) اذا جعل  $\alpha$  رمزاً لنصف قطر الدائرة كان محيط  $\alpha$  =  $\pi$   $\alpha$  نق

واذن يكون سطح الدائرة =  $\pi$   $\alpha$   $\alpha$  =  $\frac{\pi}{2} \alpha^2$   $\alpha$   $\alpha$

(مثال) اذا كان  $\alpha = ٣٣$  وجعل  $\alpha = ١٥٤١٠٠$  كان

(١٥٨)

سطح الدائرة = ٣٧٣٥ - ٤٨ متر مربع

(نتيجة) سطح القطاع يساوى حاصل ضرب قوسه في نصف قطره  
 لان نسبة القطاع ا د ب الى الدائرة الكلية كنسبة  
 القوس ا د ب الى المحيط ا ب س (قضية ١٨ مقالة ٤)



أو كنسبة ا د ب  $\times \frac{1}{4}$  الى ا ب س الى ا ب س  $\times \frac{1}{4}$

وحيث ان الدائرة الكلية = ا ب س  $\times \frac{1}{4}$  ا د ب فتكون مساحة القطاع ا د ب

= ا ب س  $\times \frac{1}{4}$  ا د ب

(مثال) ليكن ا د = ١٤ ولنفرض ان القوس ا م ب يحتوى على  $\frac{70}{360}$  فالإيجاد

طول هذا القوس يوضع التناسب

$$\frac{\frac{70}{360}}{\text{ط ٤}} = \frac{\text{قوس ا م ب}}{\text{ط ٤}}$$

ومنه يحدث

$$\text{قوس ا م ب} = \frac{\text{ط ٤} \times \frac{70}{360}}{\text{ط ٤}} = \frac{\text{ط ٤} \times 70}{360} = \frac{14 \times 70}{360} = \frac{14 \times 7}{36} = \frac{14 \times 7}{9} = \frac{98}{9} = 10 \frac{8}{9}$$

وبذا يكون

$$\text{قطاع ا د ب} = \frac{14 \times 70}{360} = \frac{14 \times 7}{36} = \frac{14 \times 7}{9} = \frac{98}{9} = 10 \frac{8}{9}$$

في مسائل تختص بالضلعات المنتظمة وفي تعيين نسبة محيط الدائرة الى قطره

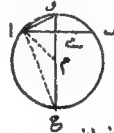
(١٥٩)

## القضية الثانية عشر

## مسألة

المعلوم من مضلع منتظم مرسوم في الدائرة ضلعه  $ab$  ومن الدائرة نفسها نصف قطرها  $و$  والمطلوب حساب الضلع  $او$  من المضلع المنتظم المرسوم في هذه الدائرة الذي عدد اضلاعه ضعف عدد اضلاع الاول

ليكن  $ab = 2م$  و  $و = او$  و  $و = س$  والضلع  $او$  من المثلث  $واج$  القائم الزاوية يحدث  $او^2 = و^2 + و^2$  و  $و = س$  و  $و = س$



وحيث ان  $و = س$  و  $و = س$  و  $و = س$

وانه مع ذلك يحدث من المثلث  $ام س$  القائم الزاوية ما هو آت

$$م = س = \sqrt{و^2 - او^2} = \sqrt{و^2 - او^2}$$

$$و = س = \sqrt{و^2 - او^2}$$

واذن يكون  $و = س$  و  $و = س$  و  $و = س$  (١)

وبالعكس يمكن حساب  $و$  متى علم  $س$  ولذا يكفي حل المعادلة (١) بالنسبة الى  $و$  فبنا يحدث

$$و = \frac{و(١-و^2)}{و^2} \quad (٢)$$

وللتبثيل على القانوف (١) نعرض ان  $و$  هو ضلع المسدس أي ان  $و = س$  فبالنسبة لضلع ذي الاثنى عشر ضلع المنتظم المرسوم في الدائرة يحدث

(170)

$\sqrt{37-4} = \sqrt{\left(\frac{37}{4}-1\right)} = \sqrt{\left(\frac{33}{4}\right)} = \frac{\sqrt{33}}{2}$

والتبديل على القانون (٤) يجعل  $s$  مساوياً لقطع العشر ونبحث عن ضلع المثلث المستقيم فيجد  $s = \frac{\sqrt{33}}{2}$

ومن ذالاستنح

$$\frac{(\sqrt{c-1})^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{\left[ \frac{(\sqrt{c-1})^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \right] (\sqrt{c-1})^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = c$$

ومنه يستخرج

$$\frac{2}{\sqrt{4-1}} = 2$$

(تنبیه) اذا جمع مربع نصف القطر على مربع ضلع المعشر وجد ان

$$\frac{(-574-10)^4}{4} = \frac{(-574-7)^4}{4} + \frac{(-7)^4}{4}$$

ای یساوی مربع ضلع الخامس المنتظم

وعلى ذلك يكون ضلع الخمس المنتظم المرسوم في الدائرة كناية عن وتر مثلث قائم

الزاوية ضلعا قائمتة نصف القطر وضلع المعشر

القضية الثالثة عشر  
مسألة

المعلوم ضلع مضلع منتظم ونصف قطر الدائرة المرسومة عليه والمطلوب إيجاد

ضلع المضلع المشابه له المرسوم على الدائرة المذكورة

احمد نجيب

20

(171)

لیکن اب  $a = 6$ ,  $m = 1$ ،  $n = 6$  سے منسوبہ  
 المثلثین  $6$  و  $1$  و  $6$  م یحدث هذا التناسب

$$\frac{81}{12} = \frac{27}{4}$$



ومن جهة اخرى يحدث

$$\frac{2f}{j} = \frac{8f}{11}$$

وبسبب الفسبة المشتركة يحدث

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$(1) \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

رابع ذلك قائه من المثلث ا م ل القائم الزاوية يحدث

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

## قازان بکون

## ومن ذایحدث

$$s = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}$$

القضية الرابعة عشر

12

المعلوم الضلع اب من مضلع منتظم عدد اضلاعه ٥ وكذا النصف قطر م ب  
المخصوص بالدائرة المرسومة عليه وال المطلوب إيجاد سطح هذا المضلع

(١٦٤)

ليكن  $ا = ب > م = ١$  ثم  $ل = ١$  ونجعل  $س$  رمزاً لسطح المضلع المذكور فيحدث



$$س = د \times \frac{١}{٤}$$

$$م = ل = ١ \text{ ثم } ١ - \frac{١}{٤} = \frac{٣}{٤}$$

وهي ثابته

$$س = د \times \frac{٣}{٤} \text{ ثم } ١ - \frac{٣}{٤} = \frac{١}{٤}$$

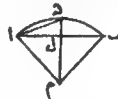
يكون

(مثال) اذا كان المطلوب ايجاد سطح المسدس المنتظم يكون  $د = ل = ١$  وعلى هذا يكون

$$س = ١ - \frac{١}{٤} = \frac{٣}{٤} \text{ ثم } ١ - \frac{٣}{٤} = \frac{١}{٤}$$

(تنبيه) يمكن ايضاً بالمعاليم عينها حساب سطح المضلع المنتظم المرسوم في الدائرة الذي عدد اضلاعه  $د$

لانه اذا كان  $د$  منتصف القوس  $ا ب$  ووصل  $ا د$  فان سطح المضلع المصغر عنه الذي نرمز له بالرمز  $س$  يتركب من مثلثات عددها  $د$  وكل منها يساوي  $ا م د$



$$س = ا م د = م \times \frac{١}{٤} = \frac{د \times ١}{٤}$$

يكون

$$س = د \times \frac{د}{٤} = \frac{د^2}{٤}$$

(١٦٣)

والتشيل على ذلك نبحث على سطح ذي الاثنى عشر مضلع منتظم المرسوم في الدائرة فيجد

$$٦ = ٥ = ٤$$

واذن يكون

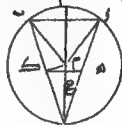
$$٦ = ٥ = ٤$$

العنصرية الخمسة عشر

مسألة

المعلوم النصف قطر م = ٥ = ٤ = ٣ = ٢ = ١ = ٠ المخصوصين بالدائرتين المرسومين خارج وداخل مضلع منتظم والمطلوب حساب النصف قطرين م = ٥ = ٤ = ٣ = ٢ = ١ المخصوصين بالدائرتين المرسومتين خارج وداخل مضلع منتظم مسارب المضلع الاول في طول المحيط وضعفه في عدد الاضلاع

ليكن ب = ضلع المضلع المنتظم المفروض م مركزه  
واخذ النصف قطر م = ١ المخصوص بالدائرة المرسومة  
في المضلع حتى يتقابل مع محيط الدائرة المرسومة عليه



في النقطة ب ثم نوصل المستقيمين ب = ٥ = ٤ = ٣ = ٢ = ١ طائراوية ب = ٥ = ٤ = ٣ = ٢ = ١ تكونت  
هي الزاوية المركزية للمضلع المبحوث عنه لانها نصف الزاوية ب = ٥ = ٤ = ٣ = ٢ = ١ وزيادة  
على ذلك اذا انزل العمود م ك على ب = ٥ = ٤ = ٣ = ٢ = ١ ومدة ك هـ موازيا ب = ٥ = ٤ = ٣ = ٢ = ١ فاف  
ك هـ يكون نصف ب = ٥ = ٤ = ٣ = ٢ = ١ ويبدل على ضلع المضلع المستقيم ويكون ك هـ نصف

قطر الدائرة المرسومة على هذا المضلع ويكون ج = نصف قطر الدائرة المرسومة فيه

$$\frac{12 + 14}{4} = \frac{1}{4} = ج$$

فيكون

$$١٥ = \frac{١٥ + ١٥}{4} \quad (١)$$

وحيث انه من المثلث م ك ع القائم الزاوية يحدث

$$١٥ = ١٥ \times م ع$$

فيكون

$$١٥ = \sqrt{١٥ \times ١٥} = \sqrt{١٥ \times ١٥} \quad (٢)$$

(تنبيه) يشاهد بالرجوع امامن الشكل و امامن القانونين ان ١٥ أكبر من ١٥ وانه بالعكس ١٥ أصغر من ١٥ بحيث انه في المضلع المستجد يكون الفرق بين نصف قطر الدائرة المرسومة عليه ونصف قطر الدائرة المرسومة فيه أقل مما في المضلع الاول

واذا بالطريقة عينها صار تحويل المضلع الثاني الى مضلع ثالث ثم صار تحويل الثالث الى رابع وهلم جرا فانه يتوصل الى مضلع يكون فيه الفرق بين نصف قطر الدائرة المرسومة عليه ونصف قطر الدائرة المرسومة فيه أصغر من اى كمية مفروضة وذلك لانه من المثلث م ب ا يحدث

$$١٥ - ١٥ > ا ب$$

$$١٥ - ١٥ > ا ب$$

أو

احمد نجيب

هكذا

م

٤١



وحيثان ب ا نصف ضلع للضلع وان هذا الضلع يمكن جعله اصغر من أى مقدار  
مفروض بقى ضوعف عدد الاضلاع من غير حد فيمكن ان نوه نوه يصير اصغر من أى  
مقدار مفروض

### القضية السادسة عشر مسئلة

المطلوب إيجاد مقدار تقريبي للنسبة الكائنة بين محيط الدائرة وقطره  
لذلك يقال انه على معنى تعريف هذه النسبة يحدث

$$(١) \quad \frac{\text{محيط}}{\text{قطر}} = ط$$

$$(٤) \quad \frac{\text{دائرة}}{\text{قطر}} = ط$$

وقد ثبت ان

فمنها نتج اربع طرق لايجاد مقدار ط  
لانه باعتبار القانون (١) يمكن حساب نصف القطر متى علم محيط الدائرة او حساب  
محيط الدائرة متى علم نصف القطر وباستعمال القانون (٤) يمكن التمرض لايجاد  
سطح الدائرة متى علم نصف القطر او حساب نصف القطر متى علمت مساحة الدائرة  
فنشرح الطريقتين الاولتين ونترض اولاً لحساب نصف قطر الدائرة التى  
طول محيطها

ولذا نرمز مربعاً ونأخذ ضلعه وحدة فلذا يصير طول محيط هذا المربع مساوياً  
وليكن نوه و نوه نصفى قطرى الدائرتين المرسومتين خارج و داخل المربع  
المذكور فيجدش

$$\text{نوه} = \frac{٤}{١} \quad \text{و نوه} = \frac{١}{٤}$$

وهذا المربع يمكن تحويله الى سمتين منتظم مساو له في طول المحيط فاذا اُصا  
استعمال قانون المسئلة المتقدمة وجد أن مقدار نصف قطر الدائرتين  
المرسومتين خارج وداخل هذا المربع

$$\frac{37+1}{4} = \text{نقطة} \quad \text{و} \quad \frac{47+1}{8} = \text{نقطة}$$

ومثل ذلك يجري حساب نصف القطرين  $\frac{37}{4}$  و  $\frac{47}{8}$  المحصورين بذي  
الستة عشر ضلع المنتظم الذي طول محيطه ٤ وبلا استمرار على هذا النوال  
يتوصل الى مضلع محيطه لم يزل مساوياً ٤ ونصفاً قطريه  $\frac{37}{4}$  و  $\frac{47}{8}$   
يختلفان بقليل على قدر ما يبرأ

وحيث ان محيط الدائرتين المرسومتين بالنصف قطرين  $\frac{37}{4}$  و  $\frac{47}{8}$  احدهما  
أكبر من ٤ والثاني اصغر من ذلك فيكون نصف قطر محيط الدائرة  
المساوي ٤ محصوراً بين  $\frac{37}{4}$  و  $\frac{47}{8}$  ويمكن الحصول عليه بقدر  
ما يراى من التقريب

واذا اُصارت تقدير النصف قطرين  $\frac{37}{4}$  و  $\frac{47}{8}$  بالاعشارى فن البديهي  
ان الارقام الاعشارية المشتركة بين المقدارين تكون من مقدار النصف  
قطر المحيط عنه

والمجدول الآتى فيه المقادير المتعاقبة لنصف قطر الدائرة المرسومة في الخارج  
ونصف قطر الدائرة المرسومة في الداخل بالنسبة للضلعات التي تعدد

اضلاعها ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ... و ٨٤٩٤

عدد الاضلاع	نصف قطر الدائرة المرسومة داخل	نصف قطر الدائرة المرسومة خارج
٤	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
٨	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
١٦	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
٣٢	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
٦٤	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
١٢٨	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
٢٥٦	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
٥١٢	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
١٠٢٤	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
٢٠٤٨	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
٤٠٩٦	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
٨١٩٢	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

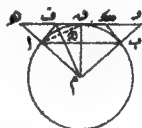
وعلى هذا يكون مقدار نصف قطر محيط الدائرة المساوي هو  $\frac{1}{2}$  وبناء عليه يكون مقدار نسبة محيط الدائرة الى القطر مساويا

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ومقدار ط التقريب الذي كان وجده ارشميدس هو  $\frac{22}{7}$  والمعلم متيوس

وجد لهذه النسبة المقدار الاقرب الاكثر في التقريب وهو  $\frac{200}{113}$

ليكن  $a$  وهو ضلع المضلعين المتشابهين  
محيطهما  $ج$  وليكن  $د$  عدد أضلاع كل  
منهما ونصل الوتر  $ا د$  ونرسم المماسين  
ا ف و ب ك من المثلثين ا ب د ثم نصل



المستقيم م ف المستقيمان ا هـ و ف ك يكونان هـ ا ضلعاً المضلع  
المرسومين داخل دوائر الدائرة اللذين عدد اضلاع كل منها ، ع ويعطاهما

إذا تقرر ذلك فانه على مقتضى القضية الثامنة يحدث

$$\frac{AC}{\sin 15^\circ} = \frac{B}{\sin 30^\circ}$$

وحيثان م ف هـ متوسط الزاوية م م هـ بحيث ايضا

$$\frac{m}{m} = \frac{f}{f}$$

ولدا على النسبة المشتركة يحدث

$$m = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

(١٦٩)

ومن فإستخرج ان  $\frac{E+E}{E^2} = \frac{E}{E^2} + \frac{E}{E^2}$  وحيث ان المستقيمين  $E$  و  $E$  في  $E$  يدخلان في المحيطين  $E$  و  $E$  مراراً  
عددها  $E$  يحدث  $\frac{E}{E} = \frac{E+E}{E^2}$

ومن هذا يحدث  $\frac{E \cdot E}{E+E} = E$  ولأجل حساب  $E$  يلاحظ ان المثلثين  $E$  و  $E$  احدهما متساوي الزوايا  
فبذا يكونان متشابهين ويحدث منهما هذا التناسب  $\frac{E}{E} = \frac{E}{E}$

وحيث ان المستقيمين  $E$  و  $E$  احدهما يدخلان في  $E$  و  $E$  مراراً عددها  $E$  وان  
المستقيمين  $E$  و  $E$  يدخلان في  $E$  و  $E$  مراراً عددها  $E$  فيكون  $\frac{E}{E} = \frac{E}{E}$

ومن هذا يحدث  $\frac{E}{E} = \frac{E}{E}$  (٤)

(نتيجة) هذا ان القانونان يؤخذان بحساب النسبة ط على قدر ما يراد من  
التقريب لانه اذا اخذت دائرة نصف قطرها الواحدة الخطية ورسم داخلها  
وخارجها مربعات محيطها  $E$  و  $E$  فانه يمكن استعمال القانونين  
(١) و (٤) في حساب محيطي المثلثين المنتظرين المرسومين داخل وخارج الدائرة  
المذكورة وبواسطة هذين المثلثين يستحصل على محيطي ذوى الستة عشر ضلع  
ومكلاً وحيث قد علم انه في هذه العمليات المتعاقبة تقرب محيطات المضلعات

(١٧٠)

المذكوره من طول محيط الدائرة فانه يمكن حساب هذا المحيط مع التقريب  
الشاقى وبقسمته على ، يحدث العدد ط



تمت القائل للربيعه







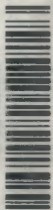








Bibliotheca Alexandrina



0479508